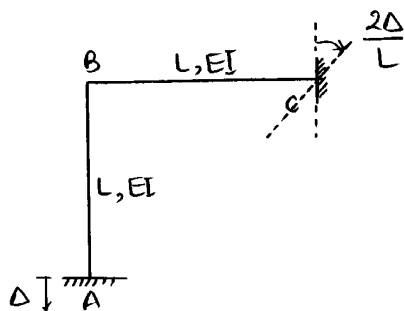


مقاومت مصالح - تحلیل سازه‌ها

۱ - در اثر نشست تکیه‌گاه A به مقدار Δ و دوران تکیه‌گاه C به مقدار $\frac{2\Delta}{L}$ ، لنگر تکیه‌گاه A را به دست آورید؟



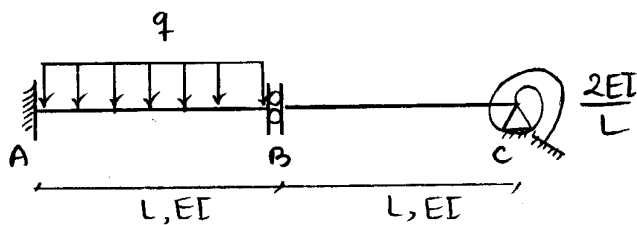
$$\frac{5EI\Delta}{4L^2} \quad (1)$$

$$\frac{EI\Delta}{L^2} \quad (2)$$

$$\frac{EI\Delta}{2L^2} \quad (3)$$

$$\frac{3EI\Delta}{2L^2} \quad (4)$$

۲ - اگر در تحلیل تیر نامعین شکل زیر یکی از مجهولات اضافی را M_B انتخاب کنیم، رابطه‌ی سازگاری تغییر مکان مربوطه بر اساس کدام رابطه نوشته می‌شود؟ (چپ: L راست: R)



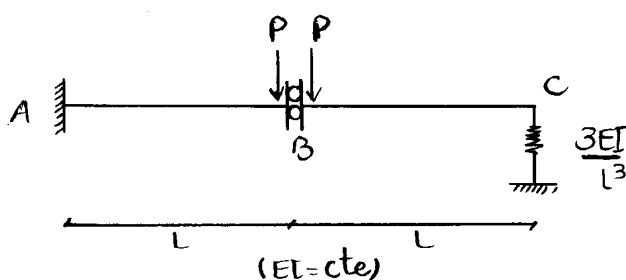
$$\theta_{BL} + \theta_{BR} = 0 \quad (1)$$

$$\theta_{BL} = \theta_{BR} = 0 \quad (2)$$

$$M_{BL}\theta_{BL} = M_{BR}\theta_{BR} \quad (3)$$

$$\theta_{BL} - \theta_{BR} = 0 \quad (4)$$

۳ - اختلاف خیز طرفین مفصل برشی در سازه‌ی مقابل کدام است؟



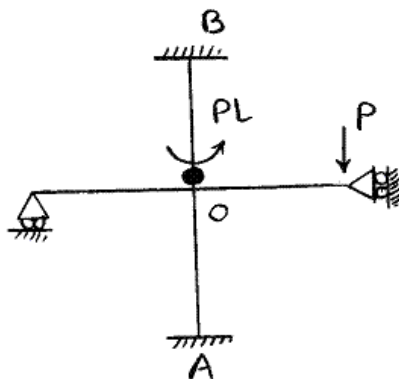
$$\frac{PL^3}{EI} \quad (1)$$

$$\frac{2PL^3}{3EI} \quad (2)$$

$$\frac{4PL^3}{3EI} \quad (3)$$

$$0 \quad (4)$$

۴ - در سازه‌ی مقابل اگر طول و مشخصات تمامی اعضا به ترتیب L و EI باشد، لنگر تکیه‌گاه A و B به ترتیب برابر است با:



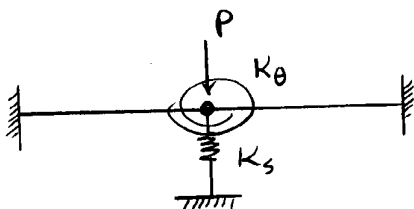
$$0, 0 \quad (1)$$

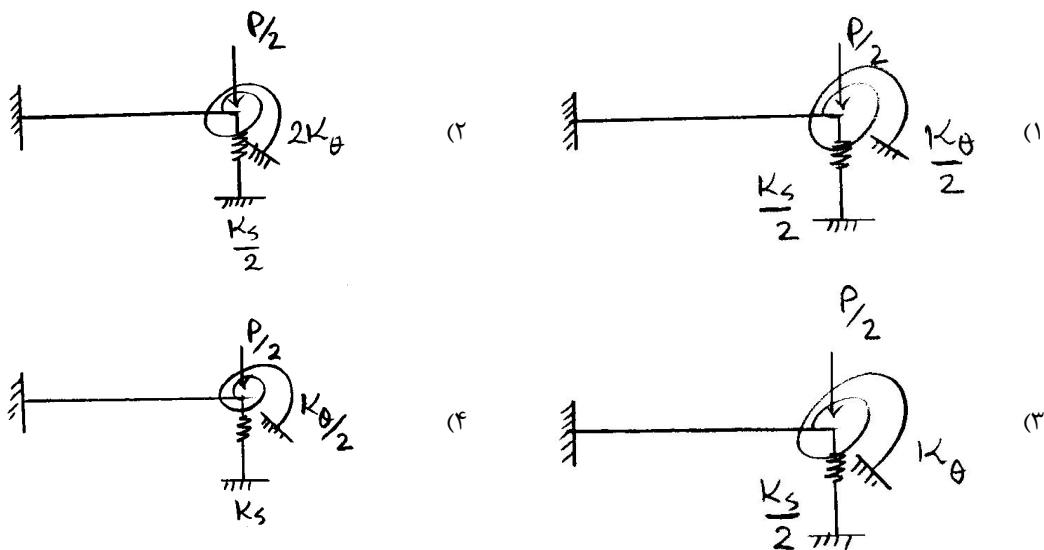
$$0, \frac{2PL}{7} \quad (2)$$

$$\frac{PL}{2}, \frac{2PL}{7} \quad (3)$$

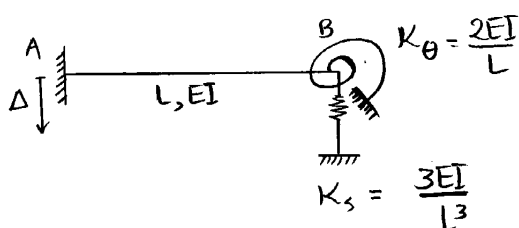
$$\frac{PL}{2}, \frac{4PL}{7} \quad (4)$$

۵ - به جای تحلیل تیر مقابل از کدام یک از تیرهای زیر می‌توان استفاده نمود؟



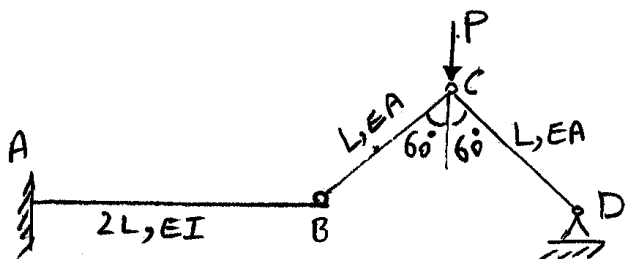


۶ - در صورتی که تکیه‌گاه A به مقدار Δ به سمت پایین نشست کند، واکنش قائم تکیه‌گاه A کدام است؟



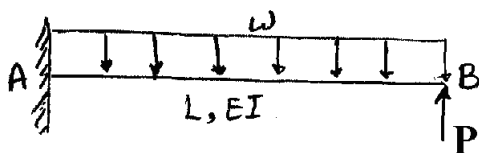
(۱) $\frac{2EI\Delta}{L^3}$
 (۲) $\frac{6EI\Delta}{7L^3}$
 (۳) $\frac{5EI\Delta}{6L^3}$
 (۴) $\frac{EI\Delta}{3L^3}$

۷ - در شکل مقابل خیز قائم نقطه C کدام است؟ $\left(I = \frac{AL^2}{6}\right)$



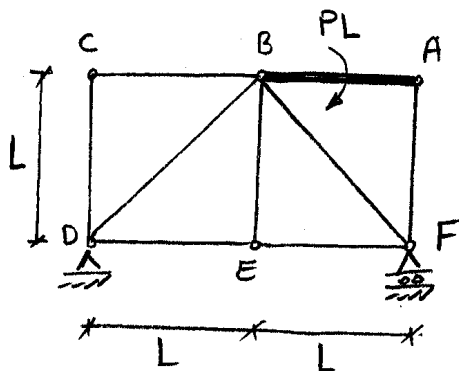
(۱) $\frac{12PL}{EA}$
 (۲) $\frac{10PL}{EA}$
 (۳) $\frac{3PL}{EA}$
 (۴) $\frac{6PL}{EA}$

۸ - در شکل زیر بار P چقدر باشد تا انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه مینیمم شود؟



(۱) $\frac{1}{2}wL$
 (۲) $\frac{3}{8}wL$
 (۳) $\frac{5}{8}wL$
 (۴) $2wL$

۹ - در سازه زیر عضو AB صلب است و سختی محوری سایر اعضاء ثابت و برابر EA می باشد. دوران عضو AB کدام است؟



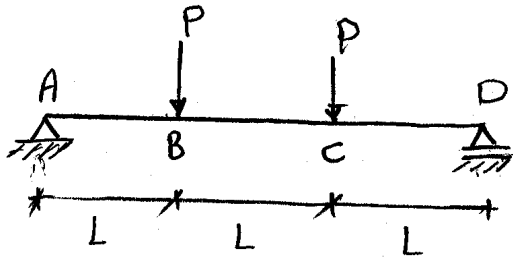
$$(1) \frac{(3+2\sqrt{2})P}{EA}$$

$$(2) \frac{(2+\sqrt{2})P}{EA}$$

$$(3) \frac{(3+2\sqrt{2})P}{2EA}$$

$$(4) \frac{(2+\sqrt{2})P}{2EA}$$

۱۰ - در شکل زیر اختلاف شیب بین A و B و همچنین فاصله نقطه C از مماس ترسیمی از نقطه A به ترتیب کدام است؟ (EI ثابت است).



$$(1) \frac{2PL^3}{3EI}, \frac{PL^2}{2EI}$$

$$(2) \frac{7PL^3}{6EI}, \frac{PL^2}{EI}$$

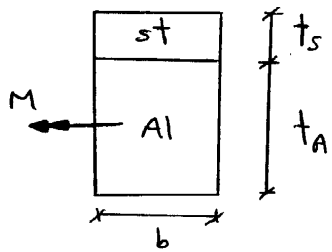
$$(3) \frac{2PL^3}{3EI}, \frac{PL^2}{EI}$$

$$(4) \frac{7PL^3}{6EI}, \frac{PL^2}{2EI}$$

۱۱- قطعات فولادی و آلومینیومی مطابق شکل مقابل کاملاً به هم متصل شده‌اند. به طوری که مقطع به صورت یک پارچه

عمل می‌کند. نسبت $\frac{t_s}{t_A}$ چقدر باشد تا تحت لنگر خمشی وارد شده به مقطع، تار خنثی (Natural Axes) در محل

اتصال دو قطعه باشد؟ ($E_{st} = 3E_{Al}$)



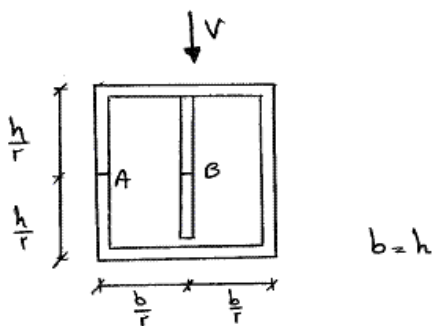
$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

$$3 \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (3)$$

$$\sqrt{3} \quad (4)$$

۱۲- در شکل مقابل، تنش برشی در نقاط A و B مشخص شده از مقطع کدام است؟ (ضخامت المان میانی، $2t$ و سایر المان‌ها، t است.)



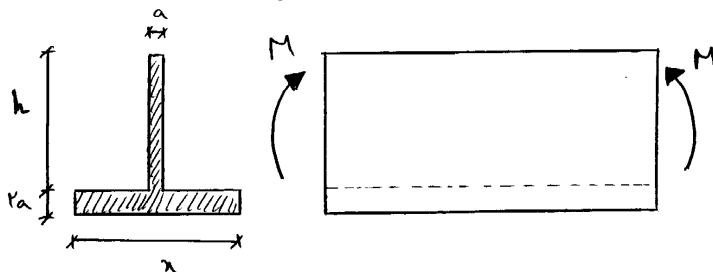
(۲) $\tau_A = \frac{3V}{20bt}$, $\tau_B = \frac{3V}{20bt}$ (۱)

$\tau_A = \frac{9V}{20bt}$, $\tau_B = \frac{3V}{40bt}$

(۴) $\tau_A = \frac{3V}{20bt}$, $\tau_B = \frac{9V}{40bt}$ (۳)

$\tau_A = \frac{9V}{20bt}$, $\tau_B = \frac{3V}{20bt}$

۱۳- تیر با مقطع سپری مطابق شکل تحت خمش قرار گرفته است. مقدار x در مقطع این تیر چقدر باشد تا تنش خمشی فشاری ماکزیمم ایجاد شده در مقطع، ۳ برابر تنش خمشی کششی ماکزیمم باشد؟ ($a = \frac{h}{10}$)



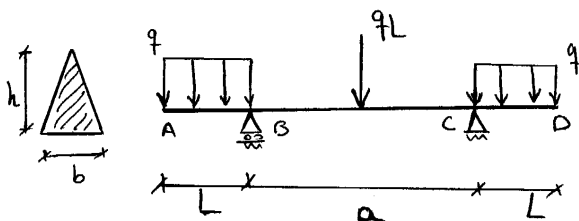
$0.6h$ (۱)

$0.72h$ (۲)

$0.8h$ (۳)

h (۴)

۱۴- تیر مقابل با مقطع مثلثی نشان داده شده مفروض است. تحت بارگذاری روی این تیر، طول دهانه‌ی میانی (a) چقدر باشد تا تیر به صورت بهینه طراحی شده باشد؟ (تنش فشاری مجاز مصالح مقطع، ۵۰ درصد از تنش کششی مجاز بیش تر است.)



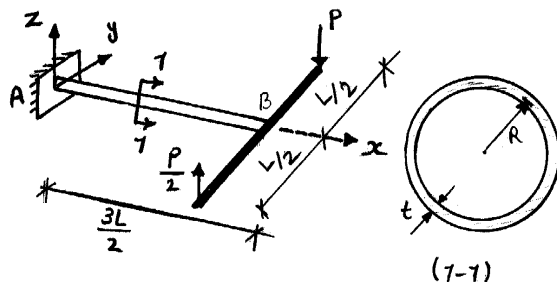
$a = 3L$ (۱)

$a = 4L$ (۲)

$a = 5L$ (۳)

$a = 2L$ (۴)

۱۵- حداکثر تنش برشی ایجاد شده در مقطع عرضی تیر AB چقدر است؟ ($L = 4R$ و مساحت مقطع AB برابر A است.)



$\frac{7}{6} \frac{P}{A}$ (۱)

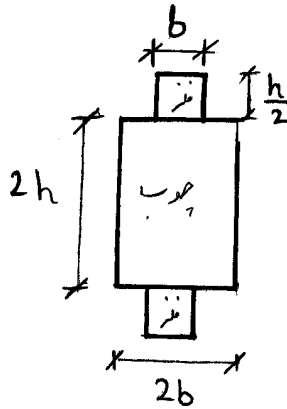
$4 \frac{P}{A}$ (۲)

$\frac{3}{2} \frac{P}{A}$ (۳)

$\frac{9}{2} \frac{P}{A}$ (۴)

۱۶- در مقطع مرکب زیر دو قطعه فلزی به ابعاد b و $\frac{h}{2}$ به بالا و پایین مقطع چوبی توسط چسب، در تمام طول تماس

متصل شده است. تحت برش قائم وارد بر مقطع، تنش ایجاد شده در چسب کدام است؟ $\left\{ \frac{E_{\text{فلز}}}{E_{\text{چوب}}} = 4 \right\}$



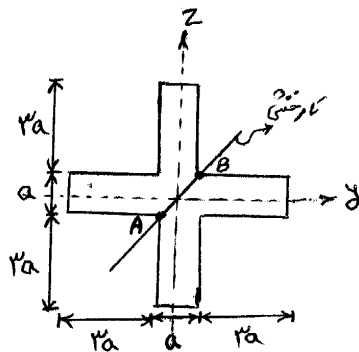
(۱) $\frac{5}{184} \cdot \frac{V}{bh}$

(۲) $\frac{5}{46} \cdot \frac{V}{bh}$

(۳) $\frac{15}{184} \cdot \frac{V}{bh}$

(۴) $\frac{15}{46} \cdot \frac{V}{bh}$

۱۷- در مقطع صلیبی نشان داده شده در صورتی که تار خنثی از مرکز صلیب و نقاط A و B بگذرد، نسبت لنگر خمشی حول محور Z به لنگر خمشی حول محور Y کدام است؟



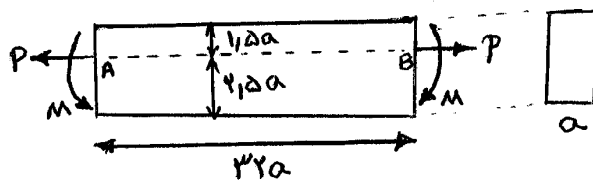
(۱) 1

(۲) $\frac{1}{3}$

(۳) $\frac{2}{3}$

(۴) $\frac{3}{2}$

۱۸- تغییر طول تار AB تحت نیروی P و لنگر خمشی $M = \frac{1}{2} Pa$ چقدر است؟ (مدول الاستیسیته میله E می باشد).



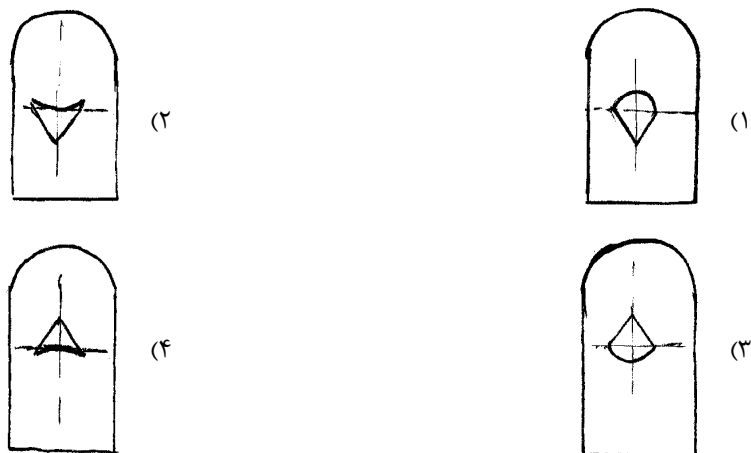
(۱) $\frac{7P}{aE}$

(۲) $\frac{6P}{aE}$

(۳) $\frac{11P}{aE}$

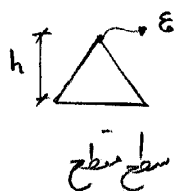
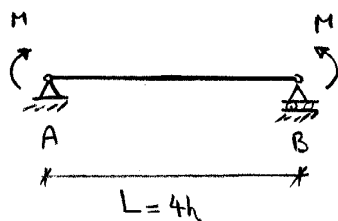
(۴) $\frac{12P}{aE}$

۱۹- کدام گزینه هسته مرکزی مقطع را صحیح نشان داده است؟



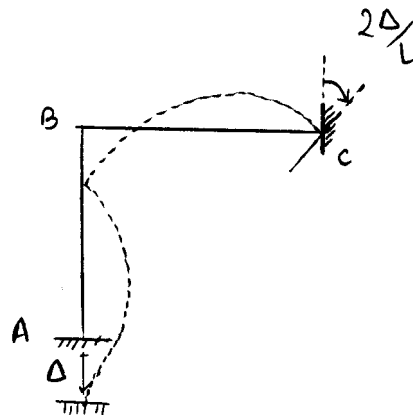
۲۰- اگر تیر دو سر ساده با مقطع مثلثی مطابق شکل بارگذاری شده و کرنش در رأس مثلث در وسط تیر برابر ε باشد،

با توجه به دقیق ترین منحنی تغییر شکل تیر، تغییر مکان وسط تیر چند برابر $\frac{h}{\varepsilon} (1 - \sqrt{1 - 9\varepsilon^2})$ خواهد بود؟



- (۱) $\frac{1}{3}$
- (۲) $\frac{2}{3}$
- (۳) $\frac{1}{9}$
- (۴) $\frac{4}{9}$

۱. گزینه ۱ درست است.



$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \Rightarrow \frac{2EI}{L}(2\theta_B) + \frac{2EI}{L}\left(2\theta_B + \frac{2\Delta}{L} + \frac{3\Delta}{L}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \theta_B = \frac{-5\Delta}{8L}$$

$$M_A = \frac{2EI}{L}(\theta_B) = \frac{-5EI\Delta}{4L^2}$$

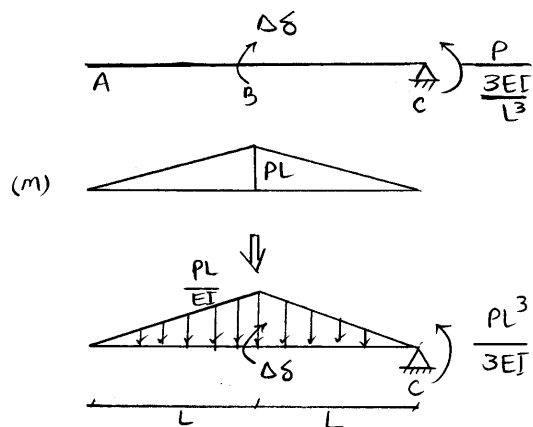
۰۲. گزینه ۴ درست است.

$$\theta_{BL} = \theta_{BR}$$

در محل یک مفصل برشی همواره شیب در سمت چپ و راست یکسان است، بنابراین:

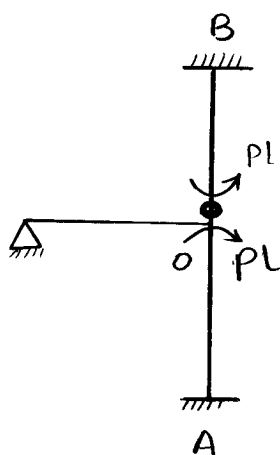
۳. گزینه ۳ درست است.

تیر مزدوج مطابق شکل روبه‌رو است:



$$\sum M_C = 0 \Rightarrow \Delta\delta = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL}{EI} \times \frac{2L}{2} \times L = \frac{4PL^3}{3EI}$$

۴. گزینه ۳ درست است.



$$M_{OA} = \frac{PL \times K_{OA}}{\sum K} = \frac{PL \times \frac{4EI}{L}}{\frac{3EI}{L} + \frac{4EI}{L}} = \frac{4PL}{7}$$

$$M_A = \frac{2PL}{7}$$

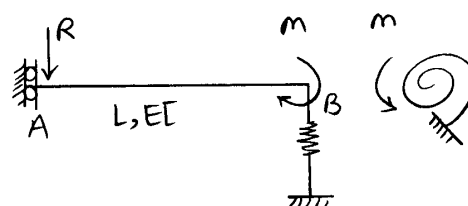
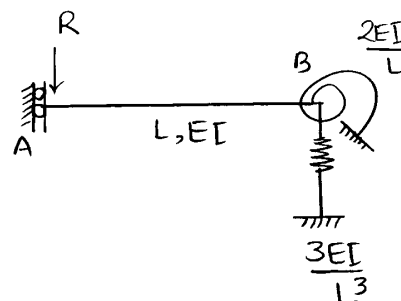
$$M_B = \frac{PL}{2}$$

۵. گزینه ۲ درست است.

در صورت وجود فنر پیش‌خی در روی محور تقارن در یک سیستم متقارن محوری مستقیم در سازه نیمه سختی آن را دو برابر سختی فنر در نظر می‌گیریم.

۶. گزینه ۱ درست است.

سازگاری: $\Delta_A = \Delta$



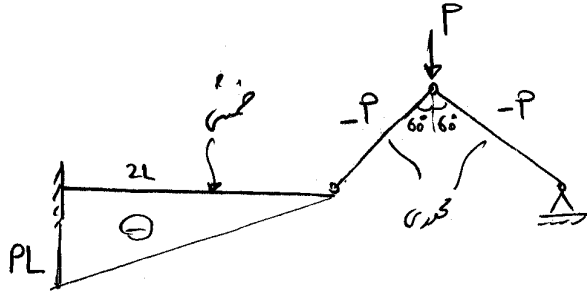
$$\theta_B = \theta_S \Rightarrow \frac{RL^2}{2EI} - \frac{mL}{EI} = \frac{m}{\frac{2EI}{L}} \Rightarrow m = \frac{RL}{3}$$

$$\Delta_A = \frac{RL^3}{3EI} + \frac{RL^3}{3EI} - \frac{mL^2}{2EI} = \frac{2RL^3}{3EI} - \frac{RL^3}{6EI} = \frac{RL^3}{2EI}$$

$$\frac{RL^3}{2EI} = \Delta \Rightarrow R = \frac{2EI\Delta}{L^3}$$

۷. گزینه ۴ صحیح می باشد.

با استفاده از روش کار حقیقی داریم:



$$P \frac{\Delta_c}{2} = \sum \int \frac{M^2}{2EI} dx + \sum \frac{N^2}{2EA} L$$

$$P \frac{\Delta_c}{2} = \frac{1}{2EI} \times \frac{(PL)^2 \times 2L}{3} + 2 \times \frac{P^2 L}{2EA}$$

$$\Rightarrow \Delta_c = \frac{2PL^3}{3EI} + \frac{2PL}{EA} \xrightarrow{I = \frac{AL^2}{6}} \Delta_c = \frac{6PL}{EA}$$

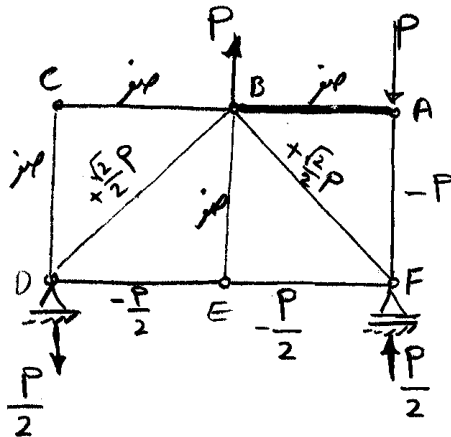
۸. گزینه ۲ صحیح می باشد.

طبق قضیه کاستیگلیانو می دانیم $\frac{\partial u}{\partial P} = \Delta_B$ است. مینیمم انرژی کرنشی زمانی اتفاق می افتد که $\frac{\partial u}{\partial P} = 0$ شود، یعنی Δ_B صفر شود.

$$\Delta_B = 0 \Rightarrow \frac{PL^3}{3EI} = \frac{\omega L^4}{8EI} \Rightarrow P = \frac{3}{8} \omega L$$

۹. گزینه ۳ صحیح می باشد.

با توجه به اینکه بارگذاری روی یک جسم صلب را می توان با معادل استاتیکی جایگزین کرد، لنگر PL را به کوپل معادلش تبدیل کرده و سوال را از روش کار حقیقی حل می کنیم:



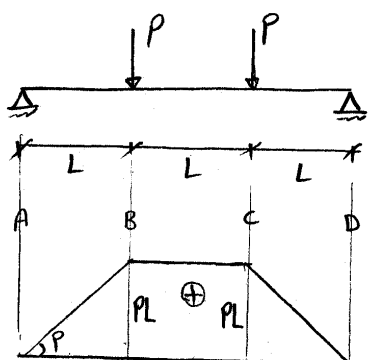
$$\frac{1}{2} M \times \theta_{AB} = \sum \frac{N^2 L}{2EA}$$

$$\times PL \times \theta_{AB} = \frac{(-P)^2 L}{2EA} + \frac{2 \times \left(-\frac{P}{2}\right)^2 \times L}{2EA} + \frac{2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} P\right)^2 \times \sqrt{2} L}{2EA}$$

$$\Rightarrow \theta_{AB} = \frac{3P}{2EA} + \frac{\sqrt{2} P}{EA} = \frac{(3 + 2\sqrt{2}) P}{2EA}$$

۱۰. گزینه ۴ صحیح می باشد.

برای محاسبه اختلاف شیب بین A و B طبق قضیه اول لنگر سطح و همچنین محاسبه فاصله نقطه C از مماس نقطه A طبق قضیه دوم لنگر سطح، ابتدا نمودار لنگر خمشی تیر را رسم می کنیم:



ثابت EI

$$\theta_B - \theta_A = \int_A^B \frac{M}{EI} dx = \frac{M}{EI} \times \text{سطح زیر نمودار از A تا B} = \frac{PL \times L}{2EI} = \frac{PL^2}{2EI}$$

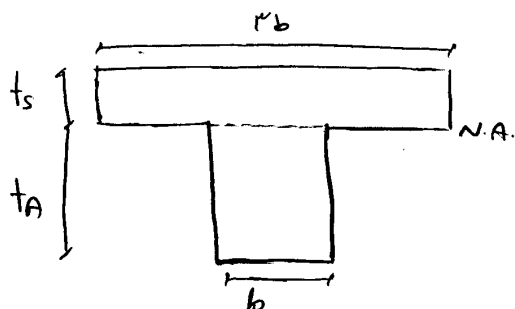
$$t_{C/A} = \frac{M}{EI} \times \text{لنگر استاتیکی زیر نمودار از A تا C} = \frac{PL \times L}{2EI} \times \frac{4}{3}L + \frac{PL \times L}{EI} \times \frac{L}{2} = \frac{7PL^3}{6EI}$$

نسبت به نقطه C از A تا C

۱۱. گزینه ۳ درست است.

$$n = \frac{E_{St}}{E_{Al}} = 3$$

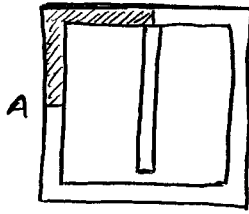
قسمت فولادی را به مقطع معادل آلومینیومی تبدیل می‌کنیم. ضریب تبدیل برابر است با:



باید گشتاور استاتیکی (Q) بالا و پایین تار خنثی باهم برابر باشد، داریم:

$$Q_s = Q_A \Rightarrow t_s \times 3b \times \frac{t_s}{2} = t_A \times b \times \frac{t_A}{2} \Rightarrow \left(\frac{t_s}{t_A}\right)^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{t_s}{t_A} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

۱۲. گزینه ۲ درست است.

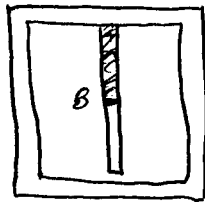


$$\tau_A = \frac{VQ_A}{It_A}$$

$$I = \frac{2}{3}b^3t + \frac{b^3(2t)}{12} = \frac{5b^3t}{6}$$

$$Q_A = \frac{b}{2} \times t \times \frac{h}{2} + \frac{h}{2} \times t \times \frac{h}{4} \stackrel{b=h}{=} \frac{3b^2t}{8}$$

$$\Rightarrow \tau_A = \frac{V \times \frac{3b^2t}{8}}{\frac{5b^3t}{6} \times t} = \frac{9V}{20bt}$$



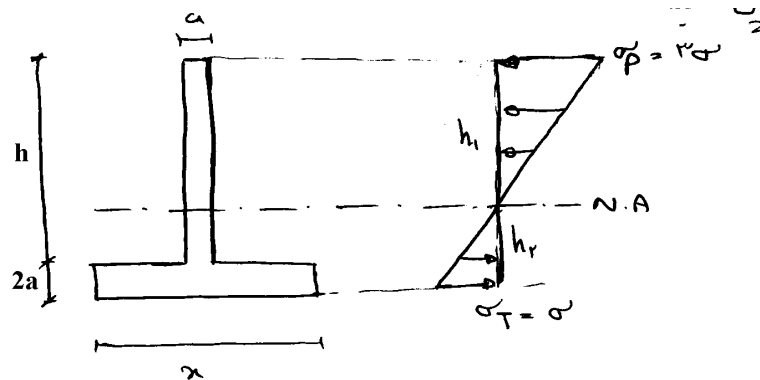
$$\tau_B = \frac{VQ_B}{It_B}$$

$$Q_B = \frac{h}{2} \times t \times \frac{h}{4} = \frac{h^2t}{8} = \frac{b^2t}{8}$$

$$\Rightarrow \tau_B = \frac{V \times \frac{b^2t}{8}}{\frac{5b^3t}{6} \times 2t} = \frac{3V}{40bt}$$

۱۳. گزینه ۴ درست است.

اگر تنش خمشی فشاری ماکزیمم ۳ برابر تنش خمشی کششی ماکزیمم باشد، باتوجه به توزیع تنش در مقطع، فاصله ی تار خنثی از تار پایین مقطع به دست می آید:



$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\sigma_p}{\sigma_T} = 3 \Rightarrow h_1 = 3h_2$$

$$h_1 + h_2 = h + 2a = h + \frac{h}{5} = 1.2h$$

$$4h_2 = 1.2h \Rightarrow h_2 = 0.3h, \quad h_1 = 0.9h$$

باید گشتاور استاتیکی (Q) بالا و پایین تار خنثی، باهم برابر باشند، بنابراین داریم:

$$Q_p = Q_T$$

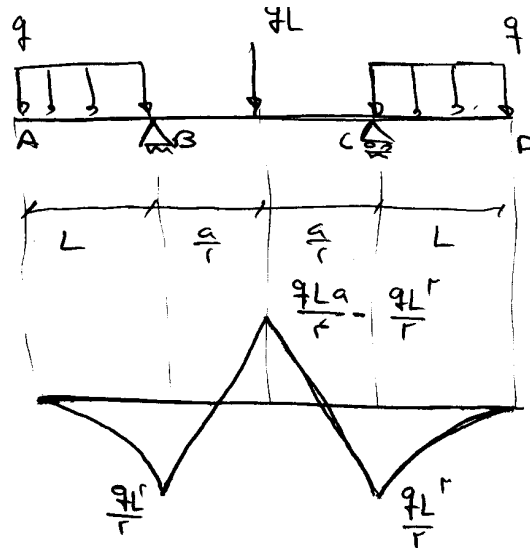
$$Q_p = \frac{ah_1^2}{2} = \frac{a \times (0.9h)^2}{2} = 0.405h^2a = 40.5a^3$$

$$Q_T = \frac{(h_2 - 2a)^2 a}{2} + 2a \times x \times (h_2 - a) = \frac{(30 - 2a)^2 a}{2} + 2ax(3a - a) = \frac{a^3}{2} + 4a^2 x$$

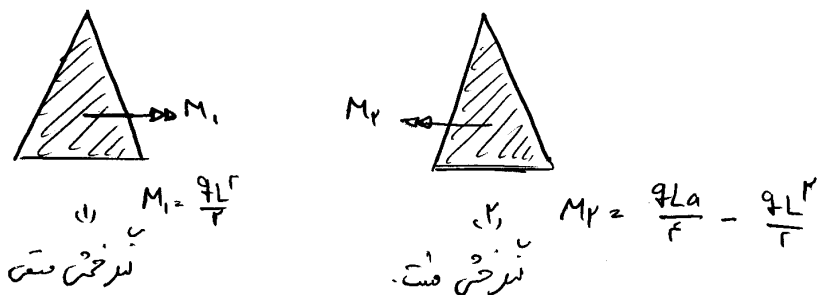
$$\Rightarrow 40.5a^3 = 0.5a^3 + 4a^2 x \Rightarrow 40a^3 = 4a^2 x \Rightarrow x = 10a = h$$

۱۴. گزینه ۳ درست است.

اگر تنش مجاز کششی را σ_0 بنامیم ($\sigma_{\omega T} = \sigma_0$)، تنش مجاز فشاری $1.5\sigma_0$ است ($\sigma_{\omega P} = 1.5\sigma_0$). نمودار لنگر خمشی در طول عضو به صورت زیر است:



در قسمت‌های AB و CD، مقطع تحت لنگر خمشی منفی و در قسمتی از BC مقطع تحت لنگر خمشی مثبت است:



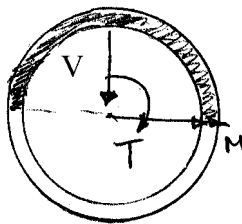
$$(1) \begin{cases} \sigma_{\max T_1} = \frac{M_1 \times \frac{2h}{3}}{I} \leq \sigma_{\omega T} = \sigma_0 \Rightarrow \frac{2M_1 h}{3I} \leq \sigma_0 \Rightarrow M_1 \leq \frac{3I\sigma_0}{2h} \\ \sigma_{\max P_1} = \frac{M_1 \times \frac{h}{3}}{I} \leq \sigma_{\omega P} = 1.5\sigma_0 \Rightarrow \frac{M_1 h}{3I} \leq 1.5\sigma_0 \Rightarrow M_1 \leq \frac{4.5\sigma_0 I}{h} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \sigma_{\max T_2} = \frac{M_2 \times \frac{h}{3}}{I} \leq \sigma_{\omega T} = \sigma_0 \Rightarrow M_2 \leq \frac{3I\sigma_0}{h} \\ \sigma_{\max P_2} = \frac{M_2 \times \frac{2h}{3}}{I} \leq \sigma_{\omega P} = 1.5\sigma_0 \Rightarrow M_2 \leq \frac{9I\sigma_0}{4h} \end{cases}$$

برای بهینه شدن طراحی تیر، باید هم‌زمان بارسیدن $\sigma_{\max T_1}$ به $\sigma_{\omega T}$ ، $\sigma_{\max P_2}$ نیز به $\sigma_{\omega P}$ برسد. داریم:

$$\frac{\sigma_{\max T_1}}{\sigma_{\max P_2}} = \frac{\sigma_{\omega T} = \sigma_0}{\sigma_{\omega P} = 1.5 \sigma_0} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{M_1}{M_2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{3qL^2}{2} = \frac{qLa}{2} - qL^2 \Rightarrow a = 5L$$

۱۵. گزینه ۲ صحیح می باشد.



$$V = \frac{P}{2}$$

$$M = \frac{3PL}{4}$$

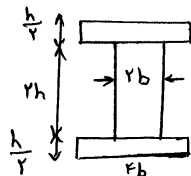
$$T = \frac{3PL}{4}$$

$$Q_{\text{هاشور خورده}} = \pi R t \times \frac{2R}{\pi} = 2R^2 t$$

$$\tau_{\max} = \frac{VQ}{It} + \frac{T}{2A_m t} = \frac{\frac{P}{2} \times 2R^2 t}{\pi R^3 t \times 2t} + \frac{\frac{3PL}{4}}{2\pi R^2 t} = \frac{P}{2\pi R t} + \frac{3P}{2\pi R t} = \frac{4P}{2\pi R t} = 4 \frac{P}{A}$$

۱۶. گزینه ۴ صحیح می باشد.

با همگن کردن مقطع نسبت به چوب داریم:



$$\bar{I} = \frac{4b \times (3h)^3 - (2b) \times (2h)^3}{12} = \frac{4(27-4)bh^3}{12} = \frac{23bh^3}{3}$$

$$\bar{Q}_{\text{چسب}} = \left(4b \times \frac{h}{2} \right) \times \left(h + \frac{h}{4} \right) = \frac{5}{2} bh^2$$

$$\tau_{\text{چسب}} = \frac{V \times \frac{5}{2} bh^2}{\frac{23bh^3}{3} \times b} = \frac{15}{46} \cdot \frac{V}{bh}$$

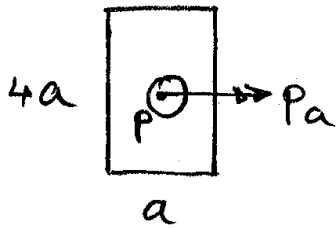
۱۷. گزینه ۱ صحیح می باشد.

باید دقت شود مقطع صلیبی است و دارای بیش از دو محور تقارن بوده و محور خمش بر محور خنثی منطبق می باشد. بنابراین داریم:

$$\tan \theta = \frac{a}{a} = \frac{M_z}{M_y} \Rightarrow \frac{M_z}{M_y} = 1$$

۱۸. گزینه ۳ صحیح می باشد.

با انتقال نیرو به مرکز سطح مقطع داریم:



$$\sigma_{AB} = \frac{P}{A} + \frac{M.y}{I} = \frac{P}{4a^2} + \frac{Pa \times 0.5a}{\frac{1}{12}a \times (4a)^3} = \frac{11P}{32a^2}$$

با توجه به ثابت بودن کرنش در طول عضو داریم:

$$\epsilon_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{E} = \frac{11P}{32a^2E} \Rightarrow \delta_{AB} = \epsilon \times L_{AB} = \frac{11P}{32a^2E} \times 32a = \frac{11P}{aE}$$

۱۹. گزینه ۳ صحیح می باشد.

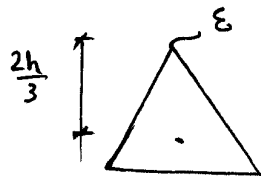
با توجه به مستطیل بودن پایین مقطع، باید هسته مرکزی در قسمت بالایی به صورت لوزی باشد. بنابراین گزینه های ۱ و ۲ نمی تواند درست باشد.

با توجه به قوس در بالای مقطع، هسته مرکزی نیز به صورت منحنی بوده و با توجه به اینکه شکل هسته همواره محدب است، نتیجه می شود که گزینه ۳ جواب صحیح خواهد بود.

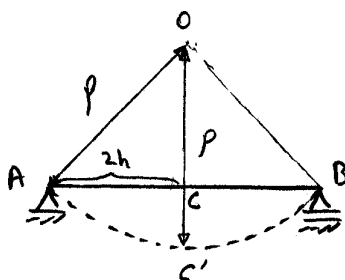
۲۰. گزینه ۲ صحیح می باشد.

با توجه به این که تیر تحت لنگر ثابت در طول تیر می باشد، منحنی تغییر شکل تیر به صورت دایره ای شکل می باشد.

با توجه به کرنش رأس مثلث داریم:



$$\epsilon = \frac{y}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{\frac{2h}{3}}{\epsilon} = \frac{2h}{3\epsilon}$$



$$OC = \sqrt{\rho^2 - AC^2} = \sqrt{\frac{4h^2}{9\epsilon^2} - 4h^2} = \frac{2h}{3\epsilon} \sqrt{1 - 9\epsilon^2}$$

$$CC' = \delta_C = \rho - OC = \frac{2h}{3\epsilon} \left(1 - \sqrt{1 - 9\epsilon^2} \right)$$