



## تحقیق در عملیات (1)

# فصل اول

## کلیات تحقیق در عملیات

## تحقیق در عملیات [OR]

یک رویکرد علمی که در صدد حل مسائل مدیریتی است و هدف آن کمک به مدیران جهت تصمیم‌گیری بهتر است. نگاه این علم مانند سایر علوم به مسائل مدیریتی یک نگاه سیستماتیک و منطقی است [تحقیق در عملیات : کاربرد روش علمی برای تحلیل و حل مسائل و تصمیمات مدیریتی است]

[OR = Operation Research]

## تاریخچه تحقیق در عملیات [OR]

موضوع تحقیق در عملیات [OR] در طول جنگ جهانی دوم توسط دانشمندان انگلیسی توسعه و گسترش یافت. دلیل انجام چنین مطالعاتی محدودیت منابع و بودجه نظامی بود. پس از جنگ، موفقیت گروه‌های نظامی توجه مدیران صنعتی را به خود جلب کرد. زیرا ورود تخصص شغلی در تشکیلات تجاری روز به روز حادث‌تر می‌شد و این وضع منجر به مسائل تصمیم‌گیری پیچیده‌ای شده بود که نهایتاً سازمانها را مجبور نمود تا درصدد استفاده از موثرترین روشهای OR برآیند.

امروزه پیشرفت چشمگیر مبانی ریاضی فنون تحقیق در عملیات و توسعه تکنولوژی رایانه، دامنه کاربرد تحقیق در عملیات را به جایی کشانده که امروزه سازمانها درصدد تهیه سیستمهای هوشمند با استفاده از منطق فازی هستند.

## ویژگی های تحقیق در عملیات

تمرکز اصلی و اولیه OR بر تصمیم گیری مدیران است

رویکرد OR یک رویکرد علمی است

در OR مسائل و تصمیمات با نگاه سیستمی بررسی می شوند

رشته OR یک رشته از ترکیب چندین رشته مستقل است [ دانش بین رشته ای است ]

در OR از مدل های ریاضی استفاده می شود

در OR از رایانه به وفور استفاده می شود

## مدلها در تحقیق در عملیات

مدلها معمولا ساده شده واقعیت است. در OR سه مدل وجود دارد که در زیر به شرح آنها خواهیم پرداخت:

**مدل شمایی:** جایگزین فیزیکی از سیستم است که معمولا در اندازه های متفاوت نشان داده می شود مانند ماکت سه بعدی و تصاویر دو بعدی

**مدل قیاسی:** این مدل در قالب نمودار دو بعدی بیان می شود مانند نمودار سازمانی

**مدل ریاضی:** مسائل پیچیده را تنها با این مدل می توان تحلیل کرد. دلایل استفاده از این مدل بدین شرح است :

- موقعیت های پیچیده را می توان تعریف کرد
- می توان زمان عملیات واقعی را شبیه سازی کرد
- آزمایش سیستم را ساده تر و امکان پذیر می سازد
- هزینه رفع عیب بسیار پایین است
- ریسک در تصمیم را محاسبه می کند
- زمینه آموزش و یادگیری را فراهم می کند

مدلهای ریاضی به سه دسته تقسیم می شوند :

قطعی : در شرایط اطمینان کامل ساخته می شود

احتمالی : در شرایط نامعین و تصادفی رخ می دهد. مهمترین مدلهای احتمالی شامل 1-مارکوفی 2-صف

ترکیبی : هم در شرایط قطعی و هم در شرایط احتمال ساخته می شود

# فصل دوم

## برنامه ریزی خطی (مدلسازی)



جدول زیر را در نظر بگیرید

میزان منابع موجود	محصول 3	محصول 2	محصول 1	
200 نفر	5	2	6	نیروی انسانی
150 کیلوگرم	3	5	4	مواد اولیه
	30	30	40	میزان سوددهی

شرکتی می خواهد بداند که از هر یک از سه محصول چه مقدار تولید کند تا با رعایت محدودیت منابع به حداکثر سود کل نایل شود

در ابتدا جدول را به صورت ریاضی در می آوریم یعنی به جای عبارت محصول از  $X$  استفاده می نماییم.  
نکته: در این مسئله از واژه محصول استفاده شده است و در مسئله دیگر می تواند واژه دیگری بکار رود.  
در هر صورت ما باید واژه ها را به  $X$  تبدیل نماییم

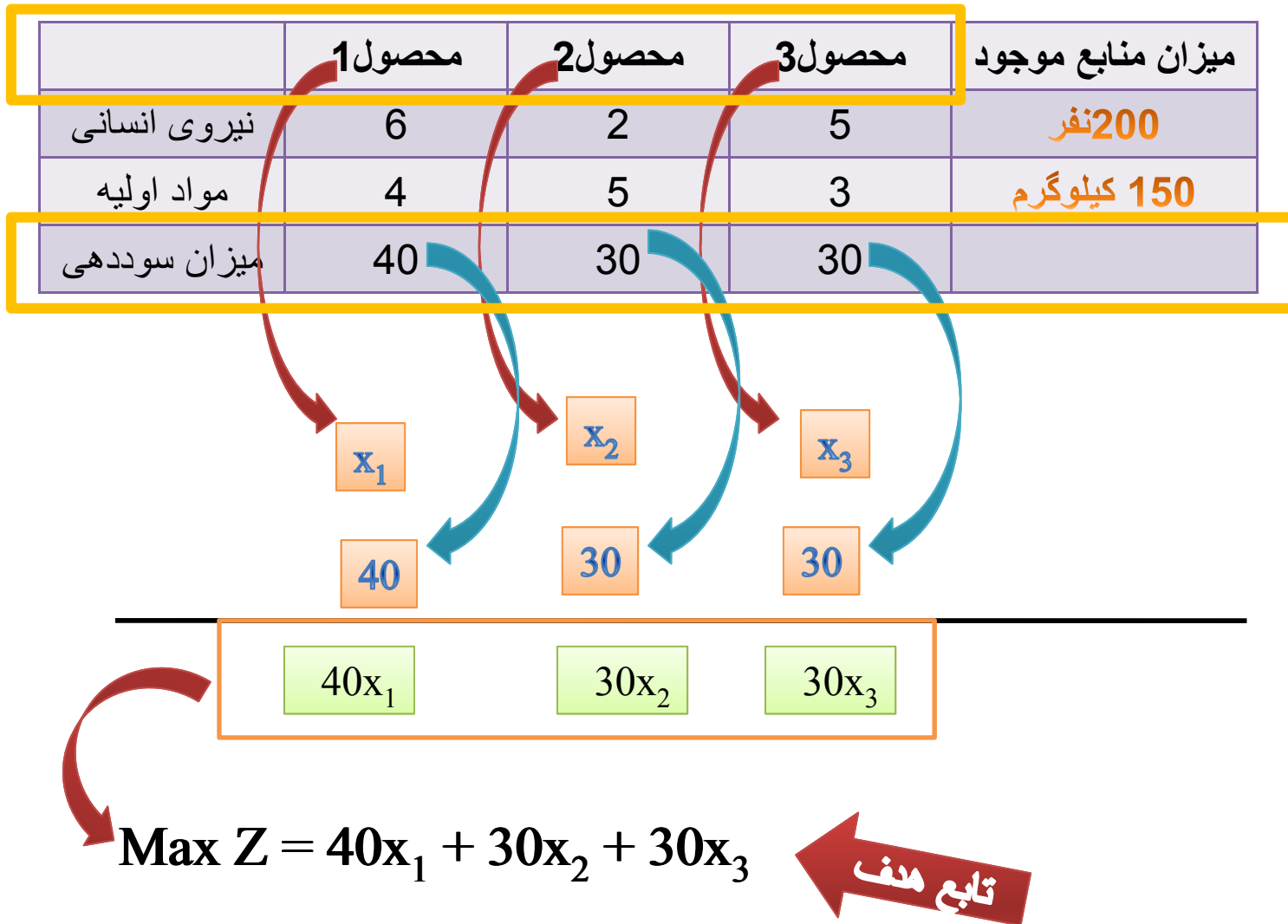
$X_1$   محصول 1

$X_2$   محصول 2

$X_3$   محصول 3

دلیل اینکه جدول را به صورت ریاضی در می آوریم این است که بتوانیم پاسخ را توسط مدل ریاضی بدست آوریم و برای این کار نمی توانیم در فرمول از کلمات محصول 1 و محصول 2 و... استفاده نماییم پس آنها را تبدیل به  $X_1$  و  $X_2$  می نماییم

بعد از نوشتن مدل ریاضی برای حداکثر کردن سود تابع هدف را رسم می کنیم

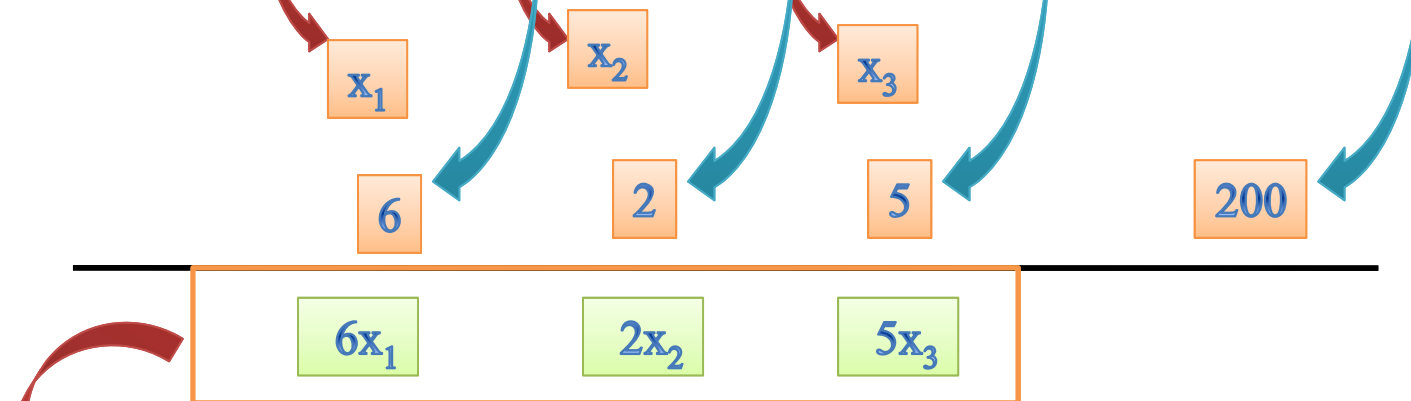


به دلیل حداکثرسازی سود از MAX استفاده می نمایم

حال محدودیت ها را می نویسیم

محاسبه محدودیت نیروی انسانی

میزان منابع موجود	محصول 1	محصول 2	محصول 3
200 نفر	6	2	5
150 کیلوگرم	4	5	3
میزان سوددهی	40	30	30



$$6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 200$$

محدودیت نیروی انسانی

به این دلیل از علامت  $\leq$  استفاده نموده ایم که میزان محصول مصرفی ما در محصول 1 و 2 و 3 باید کمتر از میزان منابع موجود باشد. یعنی اگر ما 200 نفر نیروی کار داشته باشیم نخواهیم توانست از 250 نفر در یک مسئله استفاده نماییم و حتما باید میزانی منابع بکار ببریم که یا برابر و یا کمتر از میزان منابع موجود باشد

### محاسبه محدودیت مواد اولیه

میزان منابع موجود	محصول 1	محصول 2	محصول 3
200 نفر	6	2	5
150 کیلوگرم	4	5	3
میزان سوددهی	40	30	30

$x_1$

$x_2$

$x_3$

4

5

3

150

$4x_1$

$5x_2$

$3x_3$

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 150$$

محدودیت مواد اولیه

محدودیت را با S.F.T نشان می دهند

میزان منابع موجود	محصول 3	محصول 2	محصول 1	
200 نفر	5	2	6	نیروی انسانی
150 کیلوگرم	3	5	4	مواد اولیه
	30	30	40	میزان سوددهی

$$\left. \begin{array}{l} 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 200 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 150 \end{array} \right\} \text{محدودیت کارکردی}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \left\} \text{محدودیت علامت}$$

صورت کلی محدودیت ها

محدودیت کارکردی: به میزان منابع موجود گفته می شود که در فرایند تولید به ما نشان می دهد در هنگام تولید توان استفاده بیشتر از این مقدار را نخواهیم داشت

محدودیت علامت: به ما نشان می دهد که تولید نمی تواند کمتر از صفر باشد یعنی ما هیچگاه تولید منفی نداریم

در نتیجه خواهیم داشت

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 30x_2 + 30x_3$$

s.t

$$6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 200$$

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 150$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

# فصل سوم

برنامه ریزی خطی روش هندسی



# برنامه ریزی خطی

جدول زیر را در نظر بگیرید

سود	مواد اولیه	نیروی کار	
40	4	1	محصول 1
50	3	2	محصول 2
	120	40	میزان منابع موجود

سود	مواد اولیه	نیروی کار	
40	4	1	محصول 1
50	3	2	محصول 2
	120	40	میزان منابع موجود

محصول 1  $\leftarrow X_1$

محصول 2  $\leftarrow X_2$

## تابع هدف

سود	مواد اولیه	نیروی کار	
40	4	1	محصول 1
50	3	2	محصول 2
	120	40	میزان منابع موجود

Max Z

$$40x_1 + 50x_2$$

از آنجایی که هدف حداکثر کردن سود است پس در تابع هدف از Max استفاده می نماییم

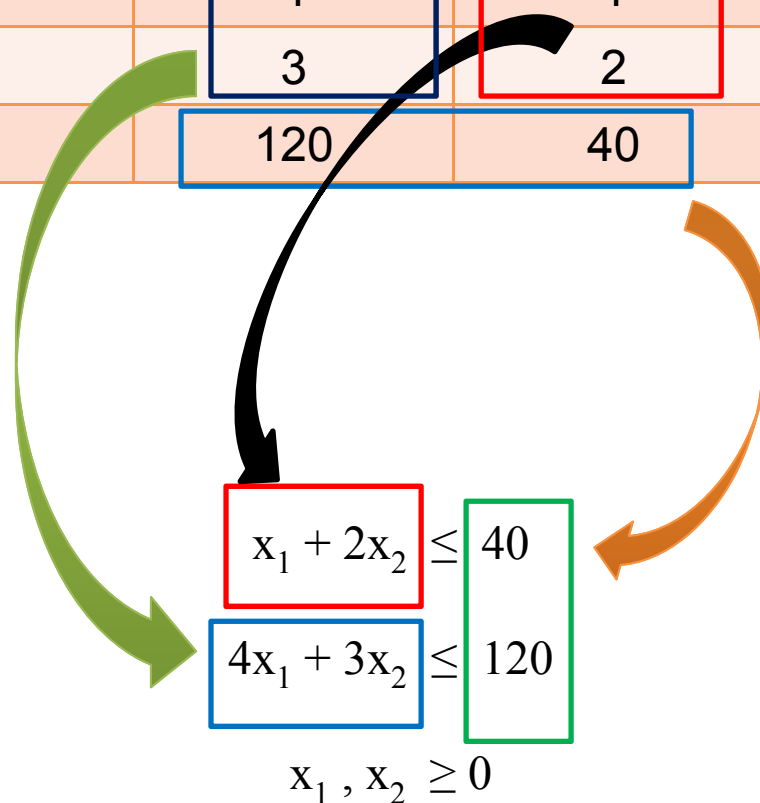
اگر هدف حداقل کردن هزینه و... باشد از Min استفاده می کنیم

تابع هدف

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 50x_2$$

محدودیت یا s.t

سود	مواد اولیه	نیروی کار	
40	4	1	محصول 1
50	3	2	محصول 2
	120	40	میزان منابع موجود



$$\text{Max } Z = 40x_1 + 50x_2$$

s.t

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 120$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

پس در حالت کلی خواهیم داشت

ابتدا  $\leq$  را تبدیل به  $=$  می کنیم

پس خواهیم داشت

$$x_1 + 2x_2 = 40$$

$x_1$  را صفر در نظر می گیریم حال باید 2 را در چه عددی ضرب کنیم تا برابر 40 شود

$$(0) + 2(20) = 40$$

مطمئناً می گوئید 20 ، پس  $x_2$  برابر 20 است

$x_2$  را صفر در نظر می گیریم پس  $x_1$  برابر 40 است

$$(40) + 2(0) = 40$$

$$\begin{cases} x_1 = 40 \\ x_2 = 20 \end{cases}$$

در کل خواهیم داشت

ابتدا  $\leq$  را تبدیل به  $=$  می کنیم

پس خواهیم داشت

$$4x_1 + 3x_2 = 120$$

$x_1$  را صفر در نظر می گیریم حال باید 3 را در چه عددی ضرب کنیم تا برابر 120 شود

$$4(0) + 3(40) = 120$$

مطمئناً می گوئید 40 ، پس  $x_2$  برابر 40 است

$x_2$  را صفر در نظر می گیریم حال باید 4 را در چه عددی ضرب کنیم تا برابر 120 شود

$$4(30) + 3(0) = 120$$

مطمئناً می گوئید 30 ، پس  $x_1$  برابر 30 است

$$\begin{cases} x_1 = 30 \\ x_2 = 40 \end{cases}$$

در کل خواهیم داشت



$$x_1 + 2x_2 = 40$$

$$\begin{array}{l} (0) + 2(20) = 40 \\ (40) + 2(0) = 40 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 20 \\ x_1 = 40 \end{array} \right.$$

$$4x_1 + 3x_2 = 120$$

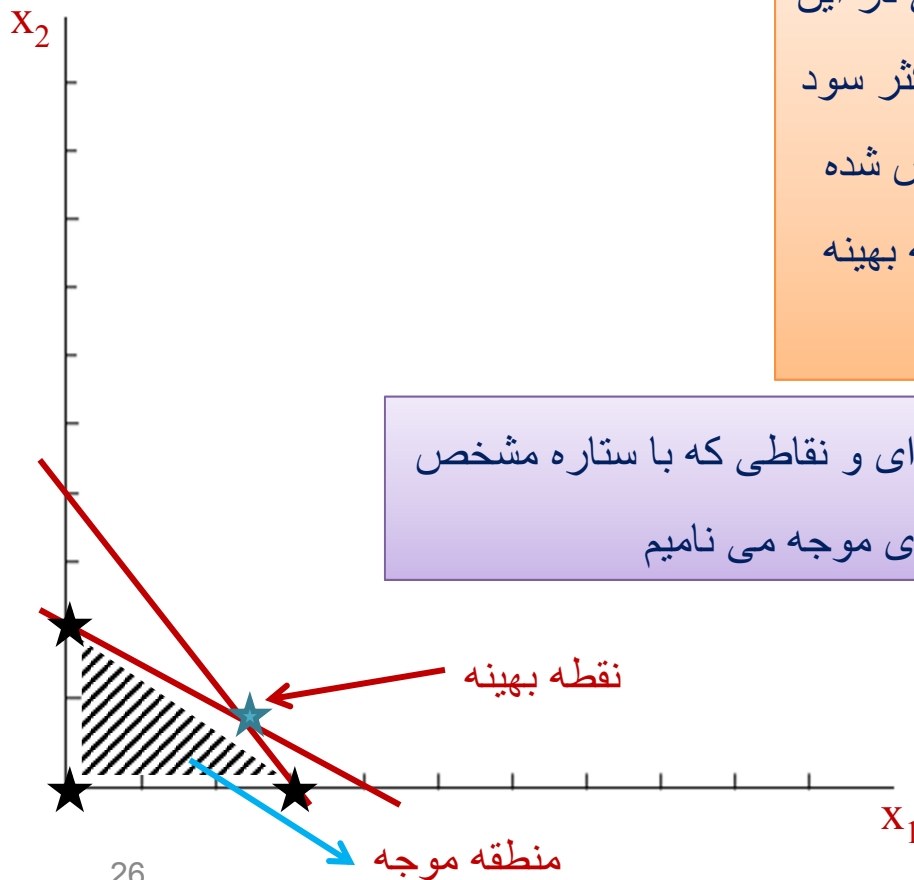
$$\begin{array}{l} 4(0) + 3(40) = 120 \\ 4(30) + 3(0) = 120 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 40 \\ x_1 = 30 \end{array} \right.$$

چند نکته:

بر اساس نقاطی که در اسلاید قبل بدست آوردیم و با رنگ آبی مشخص کردیم خطوط را رسم می کنیم

منطقه هاشور خورده منطقه موجه است یعنی در این ناحیه به سود می رسیم ولی ما به دنبال حداکثر سود هستیم پس نقطه ای که با ستاره آبی مشخص شده است نقطه حداکثر سود است که به آن نقطه بهینه می گوئیم

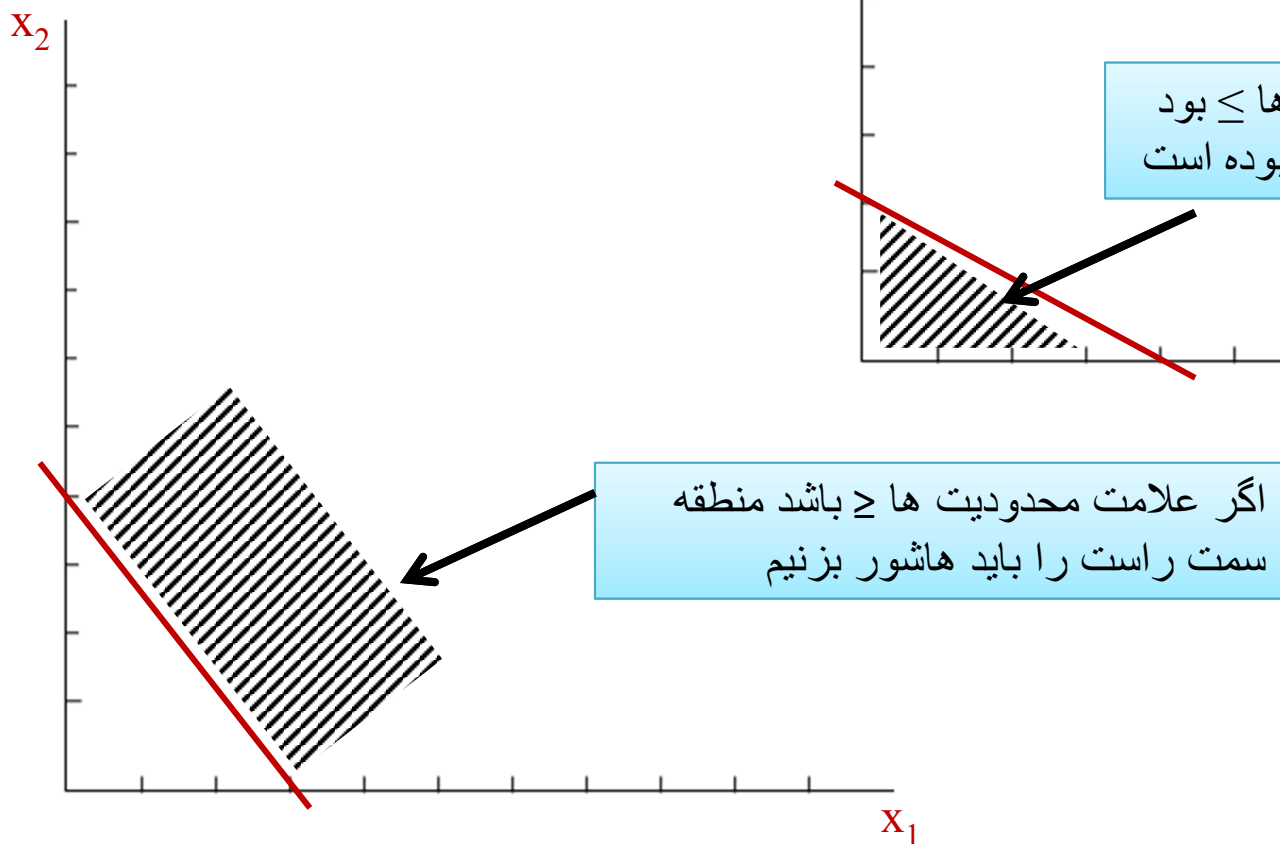
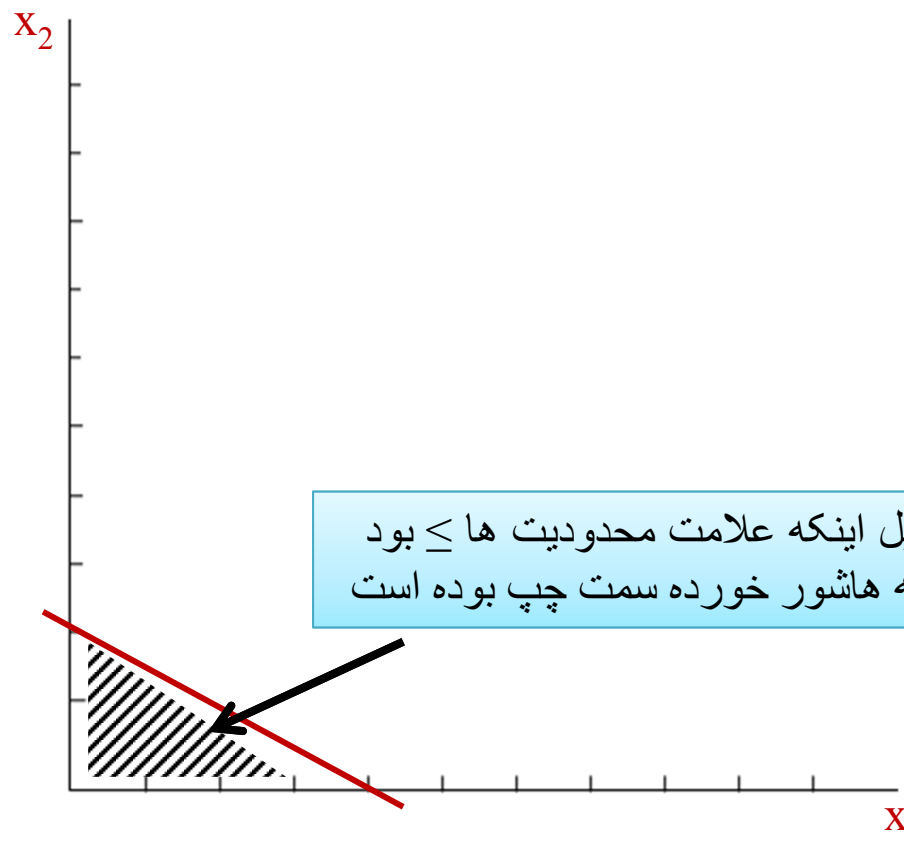
محل تلاقی دو خط را نقطه گوشه ای و نقاطی که با ستاره مشخص شده را نقطه گوشه ای موجه می نامیم



منطقه ی مشترک بین تمام خطوط را منطقه موجه می نامیم

اگر این مسئله را فراموش کردید بهتر است که علامت ها را مانند نوک پیکان در نظر بگیرید. نوک پیکان به هر سمت که باشد آن منطقه را باید هاشور زد.

$\leq$  ←  
→  $\geq$



# نقطه بهینه

## نقطه بهینه

برای بدست آوردن نقطه بهینه باید طبق دستور زیر عمل نمایید

ابتدا چهار نقطه گوشه ای موجه را با حروف A,B,C,D مشخص می کنیم

سپس  $x_1$  و  $x_2$  نقاط A,B,C را می نویسیم برای این کار تنها باید به

دستگاه مقابل نگاه کنید. با یک نگاه ساده می توانید ببینید که نقطه A بر

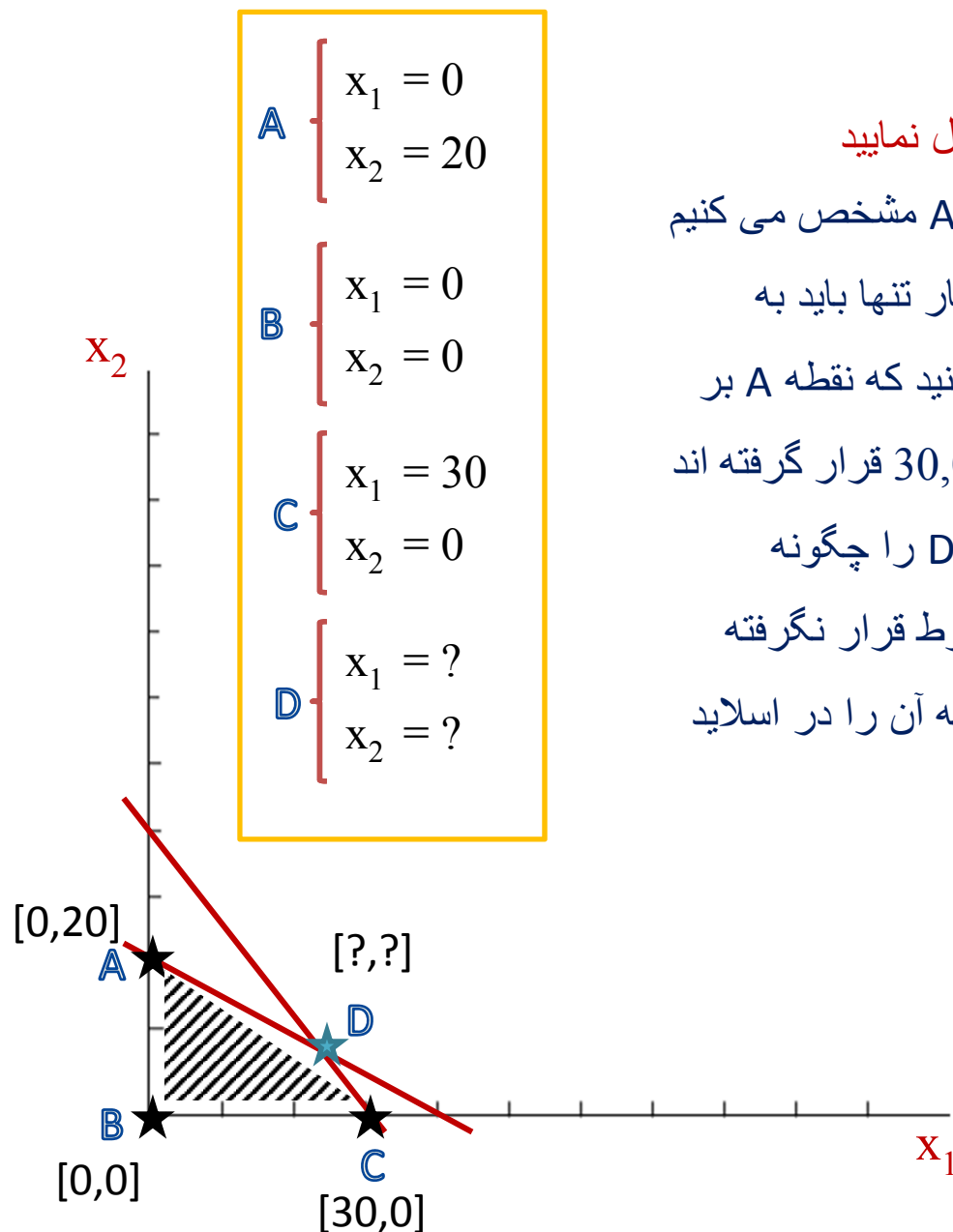
روی 0,20 نقطه B بر روی 0,0 و نقطه C بر روی 30,0 قرار گرفته اند

حال ممکن است این سوال برایتان پیش بیاید که نقطه D را چگونه

بدست آوریم؟ چون این نقطه بر روی هیچ یک از خطوط قرار نگرفته

پس باید این نقطه را با محاسبه بدست آورید که محاسبه آن را در اسلاید

بعد می توانید مشاهده نمایید



قبل از محاسبه، تابع هدف و محدودیت ها را در نظر بگیرید

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 50x_2$$

s.t

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 120$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

حال به اسلاید بعد بروید

طرفین معادله 1 را در 4- ضرب می کنیم و همانگونه که در زیر می بینید محاسبه می نماییم

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 40 & \text{معادله 1} \\ 4x_1 + 3x_2 = 120 & \text{معادله 2} \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} -4 \left[ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 40 \\ 4x_1 + 3x_2 = 120 \end{array} \right. \left[ \begin{array}{l} -4x_1 - 8x_2 = -160 \\ 4x_1 + 3x_2 = 120 \end{array} \right. \left[ \begin{array}{l} \cancel{-4x_1} - 8x_2 = -160 \\ \cancel{4x_1} + 3x_2 = 120 \\ \hline -5x_2 = -40 \\ x_2 = 8 \end{array} \right. \end{array}$$

بنابراین با مشخص شدن مقدار  $x_2$  می توانیم به کمک یکی از معادلات اصلی مقدار  $x_1$  را نیز تعیین نماییم

$$x_1 + 2(8) = 40 \longrightarrow 2(8) = 16 \longrightarrow 40 - 16 = 24 \longrightarrow x_1 = 24$$

حال که تمامی نقاط  $x_1, x_2$  را برای A, B, C, D مشخص نمودیم می توانیم آنها را در تابع هدف قرار دهیم تا نقطه بهینه را بدست آوریم برای این کار به اسلاید بعد مراجعه نمایید

$$A \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 20 \end{cases} \Rightarrow 40(0) + 50(20) = 1000$$

نقاط بدست آمده را در تابع هدف وارد می کنیم.  
بزرگ ترین نقطه بدست آمده نقطه بهینه خواهد بود

$$B \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 40(0) + 50(0) = 0$$

تابع هدف



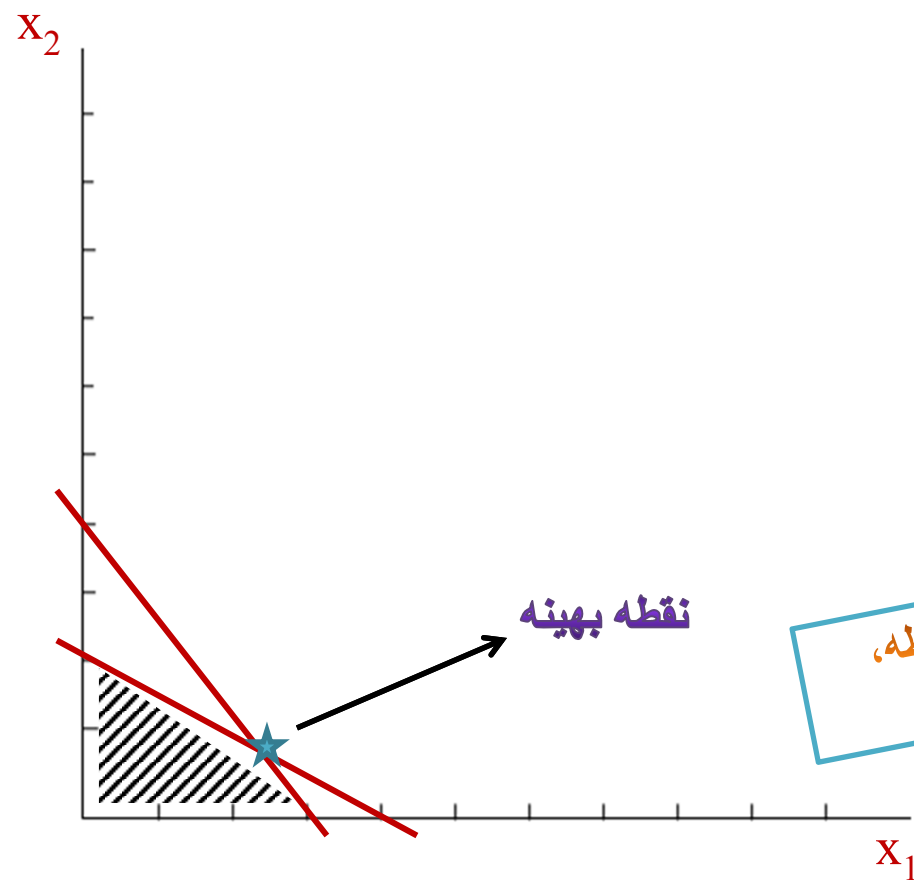
$$\text{Max } Z = 40x_1 + 50x_2$$

$$C \begin{cases} x_1 = 30 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 40(30) + 50(0) = 1200$$

$$D \begin{cases} x_1 = 24 \\ x_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow 40(24) + 50(8) = 1360 \rightarrow \text{نقطه بهینه}$$

همانطور که مشاهده می نمایید چون بیشترین مقدار متعلق به نقطه D است پس نقطه بهینه ما همین نقطه است





حال مشاهده نمودید که به چه دلیل به این نقطه،  
نقطه بهینه می گوییم.

# حالت‌های خاص نقطه بهینه

## 1- جواب بهینه چند گانه

مسائل برنامه ریزی خطی در فرم استاندارد دارای یک گوشه بهینه می باشند که مقدار تابع هدف به ازای آن

نقطه حداکثر یا حداقل می گردد. اما هرگاه معادله تابع هدف موازی یکی از محدودیت ها باشد آنگاه مسئله

برنامه ریزی خطی دارای جواب بهینه چندگانه خواهد بود. البته موازی بودن تابع هدف با یکی از محدودیت

ها تنها شرط کافی برای جواب بهینه چند گانه بودن نیست. در کل هرگاه پس از محاسبه به دو یا چند نقطه

بهینه یکسان رسیدیم آن مسئله جواب بهینه چندگانه است.

## 2- فاقد ناحیه موجه (جواب)

هرگاه نتوان برای کلیه ی محدودیت های مدل ناحیه مشترکی را پیدا نمود گویند مسئله فاقد ناحیه ی موجه می باشد.

### 3- ناحیه جواب بیکران

در برخی از مسائل ناحیه ی موجه مدل طراحی شده، به وسیله ی محدودیت ها محصور نمی شود به عبارت دیگر ناحیه موجه در میان معادلات مرزی بسته نمی شود. در چنین مدل هایی ممکن است تابع هدف به نحو نامحدودی افزایش یا کاهش یابد و هیچگاه به حداکثر یا حداقل نرسد. یعنی جواب بهینه مسئله می تواند محدود و معین و یا نامحدود باشد.

#### 4- جواب تبهگن

در یک مسئله برنامه ریزی خطی اگر گوشه موجه از محل تلاقی بیش از دو معادله ی مرزی تشکیل شود مسئله تبهگن خواهد بود. یعنی گوشه ای که بیش از دو معادله ی مرزی تشکیل شده باشد را گوشه ی تبهگن گویند.

# جواب بهینه چندگانه

جواب بهینه چند گانه : در جواب بهینه چندگانه دو یا چند نقطه مساوی بدست می آید

( مثال )

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 30x_2$$

s.t:

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 120$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

بر اساس تابع هدف و محدودیت های داده شده می خواهیم بدانیم

این مسئله جزء کدام حالت از حالت های خاص نقطه بهینه است



نقاط X را برای معادله 1 و 2 بدست می آوریم

$$4x_1 + 3x_2 = 120$$

$$4(0) + 3(40) = 120$$

$$4(30) + 3(0) = 120$$

$$\begin{cases} x_1 = 30 \\ x_2 = 40 \end{cases}$$

$$x_1 + 2x_2 = 40$$

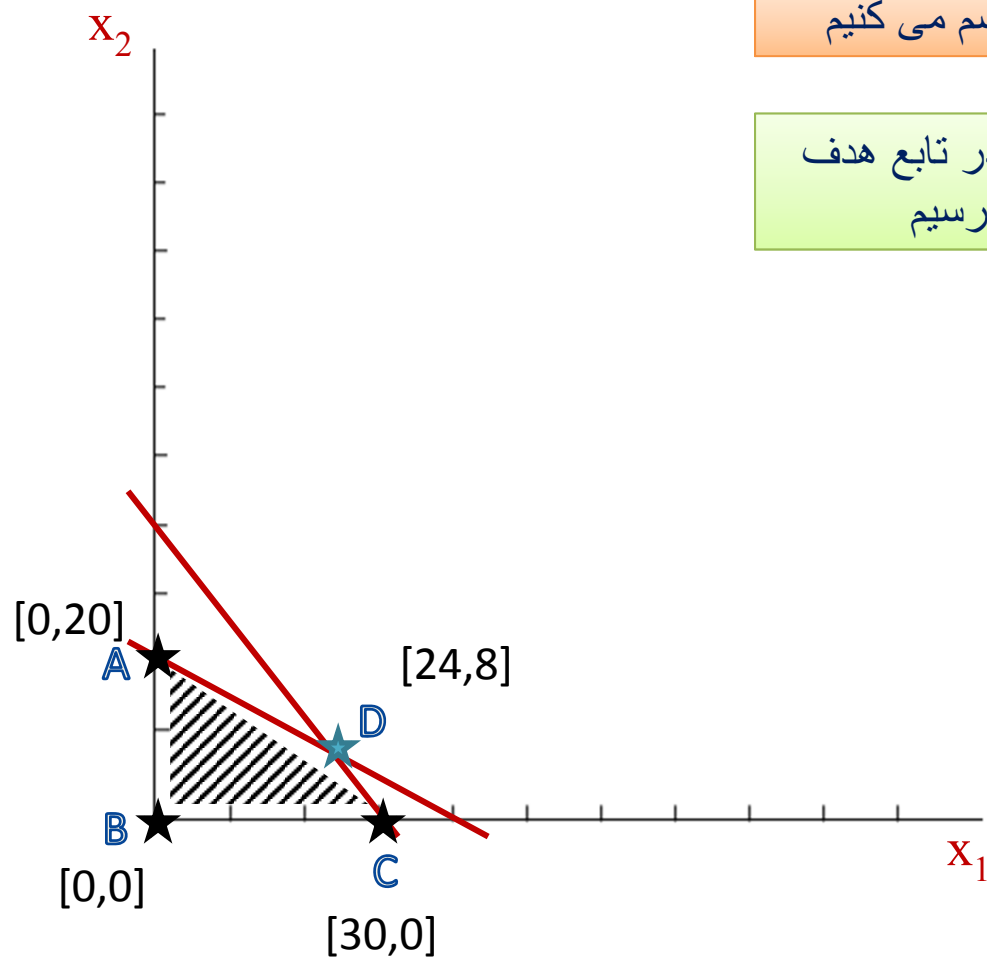
$$(0) + 2(20) = 40$$

$$(40) + 2(0) = 40$$

$$\begin{cases} x_1 = 40 \\ x_2 = 20 \end{cases}$$

نقاط بدست آمده در اسلاید قبل را رسم می کنیم

در اسلاید بعد نقاط گوشه ای بهینه را در تابع هدف قرار می دهیم تا به نقطه بهینه برسیم



تابع هدف



$$\text{Max } Z = 40x_1 + 30x_2$$

$$\text{A} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 20 \end{cases} \Rightarrow 40(0) + 30(20) = 600$$

$$\text{B} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 40(0) + 30(0) = 0$$

$$\text{C} \begin{cases} x_1 = 30 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 40(30) + 30(0) = 1200$$

$$\text{D} \begin{cases} x_1 = 24 \\ x_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow 40(24) + 30(8) = 1200$$

همانطور که مشاهده می نمایید در این مسئله به دو نقطه مساوی دست پیدا کردیم پس دو نقطه بهینه داریم بنابراین جواب بهینه چند گانه است

# فاقد ناحیه موجه

فاقد ناحیه موجه : هرگاه نتوانیم منطقه موجه مشترک برای تمام محدودیت ها بیابیم

( مثال )

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 3x_2$$

s.t:

$$4x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_2 \geq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

بر اساس تابع هدف و محدودیت های داده شده می خواهیم بدانیم

این مسئله جزء کدام حالت از حالت های خاص نقطه بهینه است

نقاط  $x$  را برای معادله 1 و 2 و 3 بدست می آوریم

$$4x_1 + 2x_2 = 8$$

$$4(\textcolor{red}{0}) + 2(\textcolor{blue}{4}) = 8$$

$$4(\textcolor{blue}{2}) + 2(\textcolor{red}{0}) = 8$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \textcolor{blue}{2} \\ x_2 = \textcolor{blue}{4} \end{array} \right.$$

$$x_1 = 4$$

$$(\textcolor{red}{4}) = 4$$

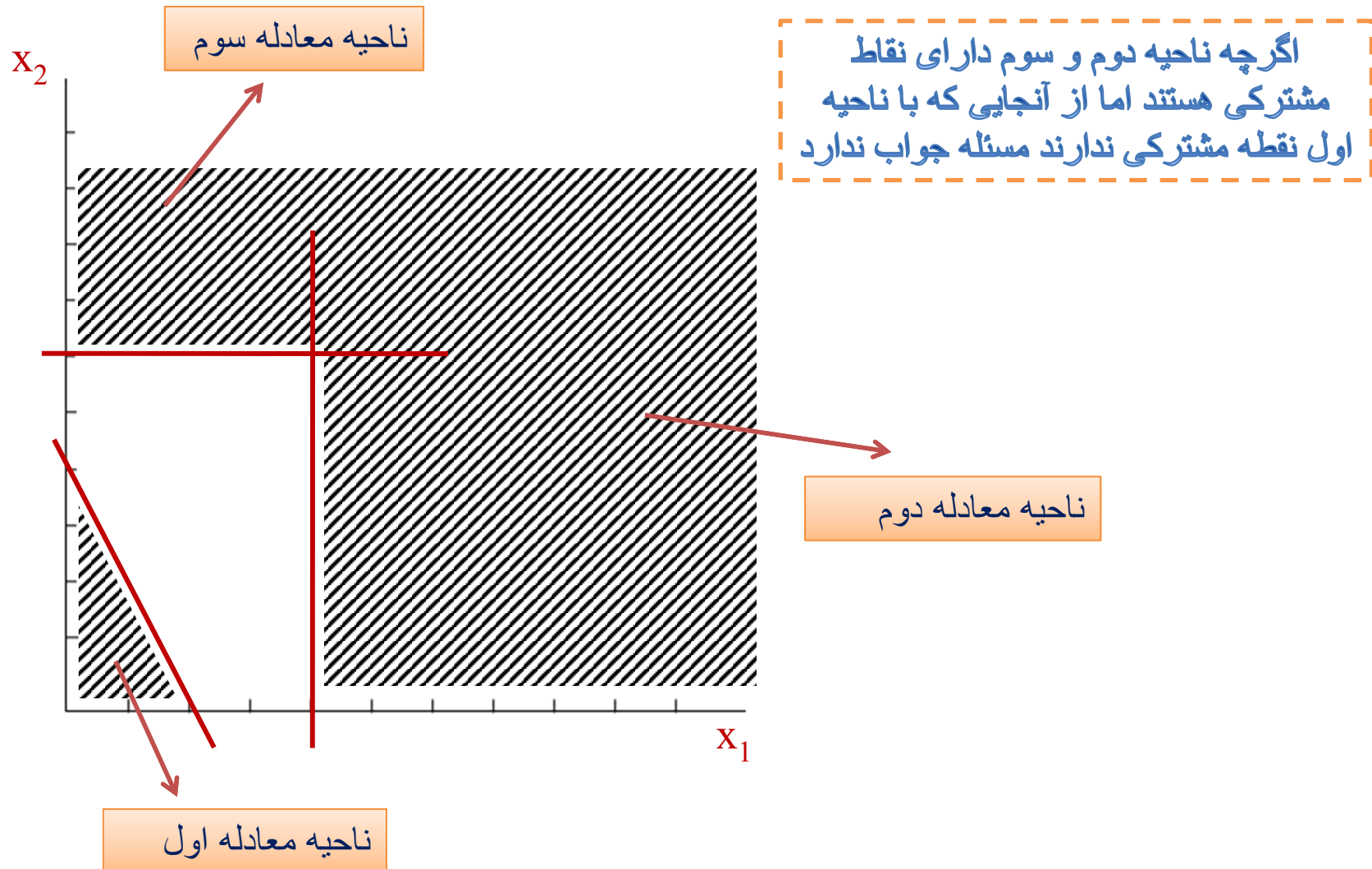
$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \textcolor{blue}{4} \end{array} \right.$$

$$x_2 = 6$$

$$(\textcolor{red}{6}) = 6$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = \textcolor{blue}{6} \end{array} \right.$$

نقاط بدست آمده در اسلاید قبل را رسم می کنیم



# ناحيه جواب بيكران



ناحیه جواب بیکران: اگر منطقه موجه توسط محدودیت ها بسته نشود

( مثال )

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 2x_2$$

s.t:

$$x_1 \geq 4$$

$$x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

بر اساس تابع هدف و محدودیت های داده شده می خواهیم بدانیم  
این مسئله جزء کدام حالت از حالت های خاص نقطه بهینه است

نقاط  $x$  را برای معادله 1 و 2 بدست می آوریم

$$x_1 = 4$$

$$(4) = 4$$

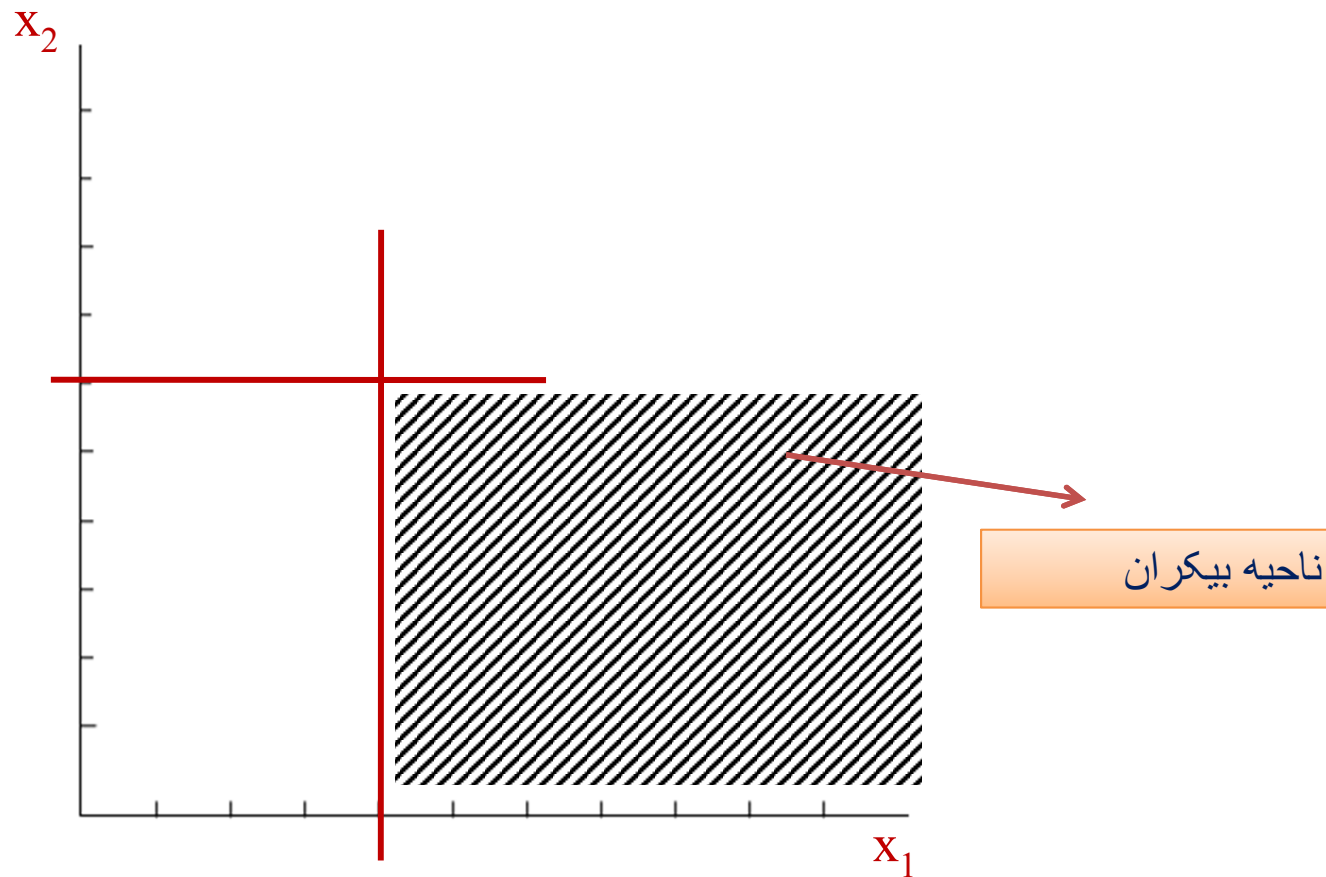
$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 4 \end{array} \right.$$

$$x_2 = 8$$

$$(8) = 8$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = 8 \end{array} \right.$$

نقاط بدست آمده در اسلاید قبل را رسم می کنیم



بنابراین تا بیکران منطقه موجه وجود دارد

# جواب تبہگن

جواب تبهگن: اگر از یک نقطه بیش از دو خط عبور کند آن را نقطه تبهگن می نامیم

( مثال )

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 6x_2$$

s.t:

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$x_2 \leq 3$$

$$5x_1 + 10x_2 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

بر اساس تابع هدف و محدودیت های داده شده می خواهیم بدانیم

این مسئله جزء کدام حالت از حالت های خاص نقطه بهینه است

نقاط  $x$  را برای معادله 1 و 2 و 3 بدست می آوریم

$$6x_1 + 4x_2 = 24$$

$$6(0) + 4(6) = 24$$

$$6(4) + 4(0) = 24$$

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 6 \end{cases}$$

$$x_2 = 3$$

$$(3) = 3$$

$$\begin{cases} x_2 = 3 \end{cases}$$

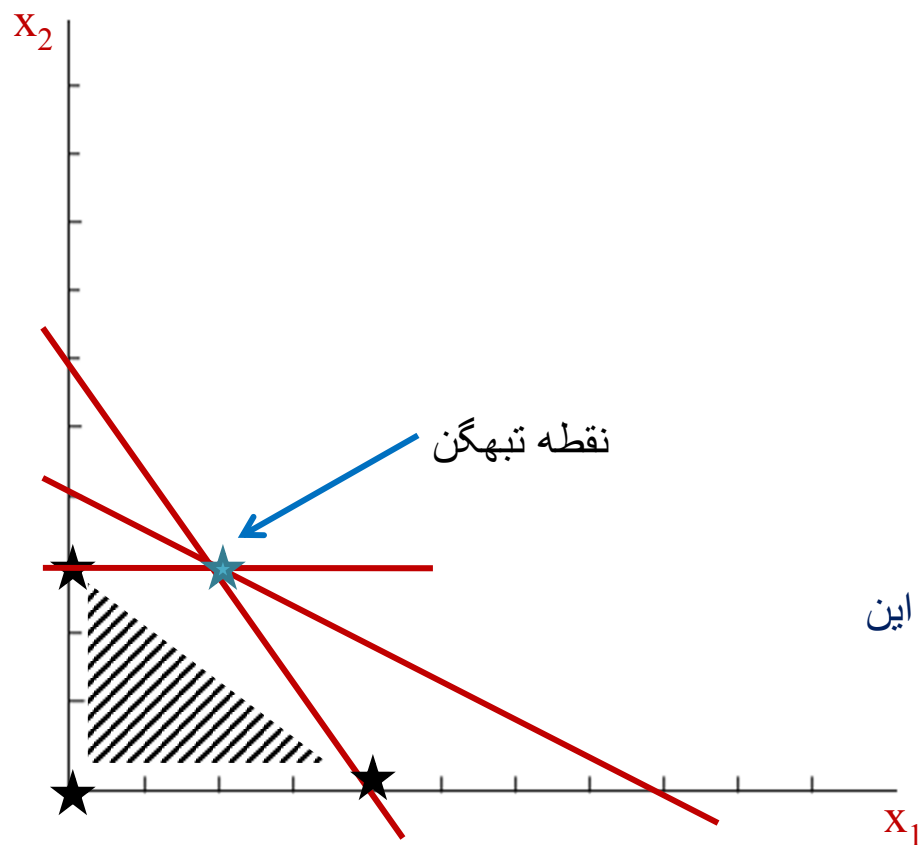
$$5x_1 + 10x_2 = 40$$

$$5(0) + 10(4) = 40$$

$$5(8) + 10(0) = 40$$

$$\begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

نقاط بدست آمده در اسلاید قبل را رسم می کنیم



به دلیل اینکه بیش از دو خط از یک نقطه عبور کرده است این  
نقطه تبهگن است