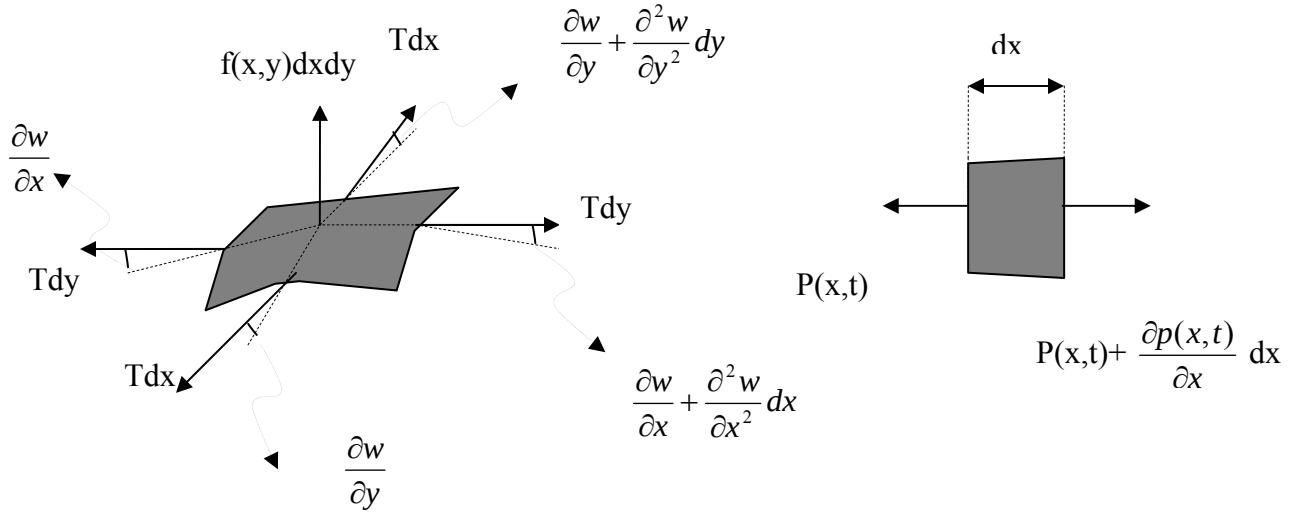
ارتعاشات مکانیکی پیشرفته

“Advanced Mechanical Vibration”



Prof . Sh . Hosseini Hashemi

بسم الله الرحمن الرحیم

ارتعاشات مکانیکی پیشرفته

$((Advanced\ \ Mechanical\ \ Vibration))$

استاد : دکتر شاهرخ حسینی هاشمی

دانشجو : محمودرضا شیشه چی

ارتعاشات مکانیکی

ارتعاشات یک پدیده دینامیکی و عبارت است از دینامیک اجسام قابل تغییر شکل (تغییر مکان در اثر نیرو) با حذف نیرو از معادله نیرو—شتاب و معادله نیرو—تغییر مکان، معادله حرکت بدست می آید.

ابتدا باید از سیستم فیزیکی مدل ریاضی درست کنیم:

۱— **مدل گسسته:** که منجر به تشکیل معادلات دیفرانسیل معمولی می گردد.

۲— **مدل پیوسته:** که منجر به تشکیل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی می گردد.

درجه آزادی: عبارت است از حداقل تعداد مختصات یا متغیرهای مکانی مستقل که وضعیت سیستم را در هر لحظه بیان می کند. این تعریف درجه آزادی برای سیستم های هولونوم یعنی سیستم هایی که قید هندسی دارند. در سیستم های غیر هولونوم قیدهای سرعت داریم و مختصات مستقل هستند ولی حداقل تعداد آنها را نمی توانیم پیدا کنیم.

در سیستم های هولونوم تعداد معادلات حرکت برابر تعداد مختصات مستقل یا تعداد درجات آزادی سیستم است.

ما در اینجا هم به سیستم های گسسته و هم به سیستم های پیوسته می پردازیم.

معادلات حرکت یک سیستم به روشهای زیر امکان پذیر است:

۱— **معادلات نیوتون—اولر** $(Newton-Euler)$:
$(F = ma, M_o = I_o\alpha)$ برای سیستم یک درجه آزادی توصیه می شود.

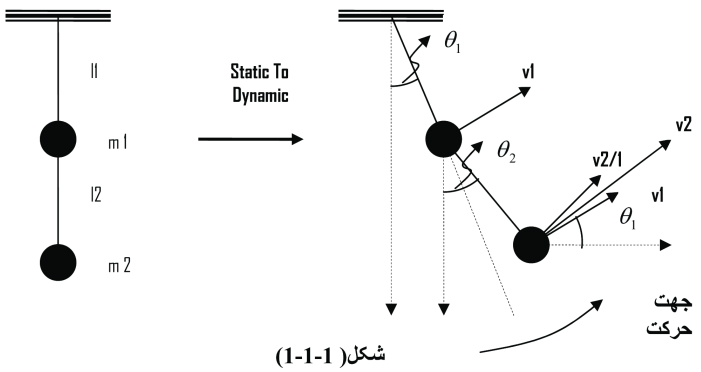
۲— **روش انرژی** $(EnergyMethod)$: برای نیروهای کنسرواتیو $(\nabla \times F = 0)$ به کار برده می شود.

۳— **روش لاگرانژ** $(LagrangeMethod)$: برای سیستم دو درجه آزادی و بالاتر توصیه می شود.

۴— **روش همیلتون** $(HamiltonMethod)$: برای سیستم های پیوسته به کار می رود.

۱- سیستم‌های گسسته:

۱ — ۱ — مطلوب است معادلات دیفرانسیل حرکت برای ارتعاشات دامنه کوچک یک آونگ دوگانه:



شکل(1-1-1)

همانطورکه دیده می‌شود سیستم دو درجه آزادی دارد.

برای بدست آوردن معادله دیفرانسیل به روش لاگرانژ $(lagrange)$ باید انرژی جنبشی T و پتانسیل U راپیدا کرد.

باتوجه به شکل داریم: $V_۲ = V_۱ + V_{۲/۱}$

انرژی جنبشی (T) :

$$T = \frac{۱}{۲}m\dot{x}^۲ = \frac{۱}{۲}mV^۲$$

که :

باجاگذاری داریم:

$$T = \frac{۱}{۲}m_۱V_۱^۲ + \frac{۱}{۲}m_۲V_۲^۲$$

$$V_۲^۲ = V_۱^۲ + V_{۲/۱}^۲ + ۲V_۱V_{۲/۱}\cos(\theta_۲ - \theta_۱)$$

$$\begin{cases} x_1 = l_1\theta_1 \Longrightarrow V_1 = l_1\dot{\theta}_1 \\ x_{2/1} = l_2\theta_2 \Longrightarrow V_{2/1}\dot{\theta}_2 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$V_2^2 = l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1^2\dot{\theta}_1^2 l_2^2\dot{\theta}_2^2\cos(\theta_2 - \theta_1)$$

بنابراین:

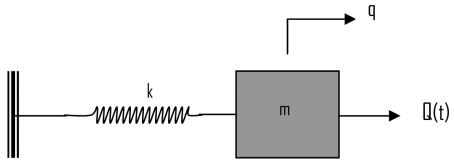
$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2 - \theta_1)$$

انرژی‌پتانسیل U :

$$U = m_1 g l_1(1 - \cos\theta_1) + m_2 g[l_1(1 - \cos\theta_1) + l_2(1 - \cos\theta_2)]$$

ریا ی بدس ت آوردن‌فرم ول‌لاگرانژ($lagrange$) می توانیم ا ز سیستم ی ک‌درج ه‌آزادی استفاده‌کنیم:

یعنی:



شکل(2-1-1)

$$m\ddot{q} + kq = Q(t) \qquad\qquad T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 \quad ,U \quad = \frac{1}{2}kq^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = m\dot{q} \Longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} = m\ddot{q}, \qquad\qquad \frac{\partial U}{\partial q} = kq$$

حال‌اگو د ر معادل ه‌دیفرانسیل جاگ ذاری‌کنی م.معادل ه‌لاگرانژ($lagrange$) ب رای‌یک سیستم‌یک‌درجه‌آزادی ($ForceVibration$) می‌شود:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}) + \frac{\partial U}{\partial q} = Q(t)$$

پس‌برای‌یک‌سیستم‌یک‌درجه‌آزادی ($FreeVibration$) داریم:

$$Q(t) = 0 \quad \Longrightarrow \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}) + \frac{\partial U}{\partial q} = 0$$

حال برای سیستم آونگ دوگانه معادله لاگرانژ $(lagrange)$ می نویسیم .

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = ۰ \qquad i = ۱, ۲$$

$$if q_۱ = \theta_۱ \quad ,q_۲ = \theta_۲$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_۱}) - \frac{\partial T}{\partial \theta_۱} + \frac{\partial U}{\partial \theta_۱} = ۰ \qquad (۱)$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_۲}) - \frac{\partial T}{\partial \theta_۲} + \frac{\partial U}{\partial \theta_۲} = ۰ \qquad (۲)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_۱} = (m_۱ + m_۲)l_۱^۲\dot{\theta}_۱ + m_۲ l_۱ l_۲ \dot{\theta}_۲ \cos(\theta_۲ - \theta_۱)$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_۱}) = (m_۱+m_۲)l_۱^۲\ddot{\theta}_۱ + m_۲ l_۱ l_۲ \ddot{\theta}_۲ \cos(\theta_۲-\theta_۱) - m_۲ l_۱ l_۲ \dot{\theta}_۲(\dot{\theta}_۲-\dot{\theta}_۱)\sin(\theta_۲-\theta_۱)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_۲} = m_۲ l_۲^۲ \dot{\theta}_۲ + m_۲ l_۱ l_۲ \dot{\theta}_۱ \cos(\theta_۲ - \theta_۱)$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_۲}) = m_۲ l_۲^۲ \ddot{\theta}_۲ + m_۲ l_۱ l_۲ \ddot{\theta}_۱ \cos(\theta_۲ - \theta_۱) - m_۲ l_۱ l_۲ \dot{\theta}_۱ (\dot{\theta}_۲ - \dot{\theta}_۱) \sin(\theta_۲ - \theta_۱)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_۱} = m_۲ l_۱ l_۲ \dot{\theta}_۱ \dot{\theta}_۲ \sin(\theta_۲ - \theta_۱)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_۲} = -m_۲ l_۱ l_۲ \dot{\theta}_۱ \dot{\theta}_۲ \sin(\theta_۲ - \theta_۱)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_۱} = (m_۱ + m_۲) g l_۱ \sin\theta_۱ \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial \theta_۲} = m_۲ g l_۲ \sin\theta_۲$$

باجاگذاری درفرمول لاگرانژ $(lagrange)$:

$$(۱) \ (m_۱ + m_۲)l_۱^۲\ddot{\theta}_۱ + m_۲ l_۱ l_۲ \ddot{\theta}_۲ \cos(\theta_۲ - \theta_۱) - m_۲ l_۱ l_۲ \dot{\theta}_۲ (\dot{\theta}_۲ - \dot{\theta}_۱)\sin(\theta_۲ - \theta_۱) +$$

$$m_۲ l_۱ l_۲ \dot{\theta}_۱ \dot{\theta}_۲ \sin(\theta_۲ - \theta_۱) + (m_۱ + m_۲) g l_۱ \sin\theta_۱ = ۰$$

$$(۲)\ m_۲ l_۲^۲ \ddot{\theta}_۲ + m_۲ l_۱ l_۲ \ddot{\theta}_۱ \cos(\theta_۲ - \theta_۱) - m_۲ l_۱ l_۲ \dot{\theta}_۱ (\dot{\theta}_۲ - \dot{\theta}_۱) \sin(\theta_۲ - \theta_۱) -$$

$$m_۲ l_۱ l_۲ \dot{\theta}_۱ \dot{\theta}_۲ \sin(\theta_۲ - \theta_۱) + m_۲ g l_۲ \sin\theta_۲ = ۰$$

اگر $(\sin\theta \simeq \theta\ ,\ \cos\theta \simeq ۱ - \frac{\theta^۲}{۲})$ دراین صورت ازدو رابطه بدست آمده بالا داریم:

$$(۱)\ (m_۱ + m_۲) l_۱^۲ \ddot{\theta}_۱ m_۲ l_۱ l_۲ \ddot{\theta}_۲ [۱ - \frac{(\theta_۲ - \theta_۱)^۲}{۲}] - \underbrace{m_۲ l_۱ l_۲ \dot{\theta}_۲ (\dot{\theta}_۲ - \dot{\theta}_۱)(\theta_۲ - \theta_۱)}_{=۰} +$$

$$\underbrace{m_۲ l_۱ l_۲ \dot{\theta}_۱ \dot{\theta}_۲ (\theta_۲ - \theta_۱)}_{=۰} + (m_۱ + m_۲) g l_۱ \sin\theta_۱ = ۰$$

$$(۲)\ m_۲ l_۲^۲ \ddot{\theta}_۲ + m_۲ l_۱ l_۲ \ddot{\theta}_۱ [۱ - \frac{(\theta_۲ - \theta_۱)^۲}{۲}] - \underbrace{m_۲ l_۱ l_۲ \dot{\theta}_۱ (\dot{\theta}_۲ - \dot{\theta}_۱)(\theta_۲ - \theta_۱)}_{=۰} -$$

$$\underbrace{m_۲ l_۱ l_۲ \dot{\theta}_۱ \dot{\theta}_۲ (\theta_۲ - \theta_۱)}_{=۰} + m_۲ g l_۲ \theta_۲ = ۰$$

$$\begin{cases} (m_۱ + m_۲) l_۱^۲ \ddot{\theta}_۱ + m_۲ l_۱ l_۲ \ddot{\theta}_۲ + (m_۱ + m_۲) g l_۱ \theta_۱ = ۰ \\ m_۲ l_۲^۲ \ddot{\theta}_۲ + m_۲ l_۱ l_۲ \ddot{\theta}_۱ + m_۲ g l_۲ \theta_۲ = ۰ \end{cases}$$

اگرساده سازی کنیم وبه شکل ماتریسی بنویسیم:

$$\begin{bmatrix} (m_۱ + m_۲) l_۱ & m_۲ l_۲ \\ l_۱ & l_۲ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_۱ \\ \ddot{\theta}_۲ \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_۱ + m_۲) g & ۰ \\ ۰ & g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_۱ \\ \theta_۲ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{Bmatrix}$$

همانطورکه مشاهده می شود کوپلینگ ازنوع دینامیکی می باشد.

اگرماتریس جرم غیرقطری وماتریس سختی قطری باشد=کوپلینگ دینامیکی.

اگرماتریس جرم قطری وماتریس سختی غیرقطری باشد=کوپلینگ استاتیکی.

اگر ماتریس جرم غیر قطری و ماتریس سختی غیرقطری باشد = کوپلینگ (استاتیکی و دینامیکی).

اگرماتریس جرم قطری وماتریس سختی قطری باشد=غیرکوپله.

بدست آوردن فرکانسهای طبیعی ω و مُدها ϕ ارتعاش:

برای این کار باید ماتریس جرم $[M]$ رادر $-\omega^۲$ ضرب وبا ماتریس سختی $[K]$ جمع کرد.

$$\begin{bmatrix} -\omega^۲ (m_۱ + m_۲) l_۱ + (m_۱ + m_۲) g & -m_۲ \omega^۲ l_۲ \\ -\omega^۲ l_۱ & -\omega^۲ l_۲ + g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_۱ \\ \bar{\theta}_۲ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{Bmatrix}$$

حال اگر دترمینان ماتریس فوق را مساوی صفر قرار دهیم.

$$\det\begin{bmatrix} -\omega^{2}(m_1+m_2)l_1+(m_1+m_2)g & -m_2\omega^{2}l_2 \\ -\omega^{2}l_1 & -\omega^{2}l_2+g \end{bmatrix}=0$$

$$[(m_1+m_2)l_1l_2-m_2l_1l_2]\omega^{4}-[(m_1+m_2)l_1g+(m_1+m_2)l_2g]\omega^{2}=0$$

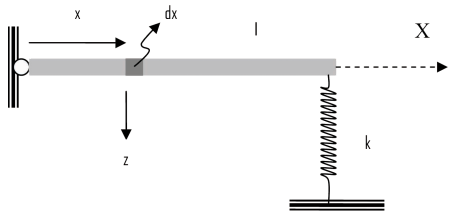
در صورت اینکه مسئله را عددی ($Numerical$) کنیم. فرکانسهای طبیعی ω و مُدها ϕ ارتعاش:

$$\omega_1^{2} \quad ,\omega_2^{2}=\frac{[(m_1+m_2)l_1g+(m_1+m_2)l_2g]}{[(m_1+m_2)l_1l_2-m_2l_1l_2]}$$

$$\frac{\bar{\theta}_1}{\bar{\theta}_2}\,|_{\omega=\omega_1}=\{\phi_1\} \quad , \quad \frac{\bar{\theta}_1}{\bar{\theta}_2}\,|_{\omega=\omega_2}=\{\phi_2\}$$

---

۲ — ۱ — یک تیر یکنواخت به طول l در یک انتها مفصل و در انتهای دیگر یک فنر که به صورت عمودی روی محور تیر عمل می کند، نگه داری شده است.



شکل(2-1-1)

تیر دارای سختی خمشی EI وسختی خطی $k=\frac{4EI}{l}$ جرم و طول l می باشد ، که $\rho=\frac{M}{l}$.

جابجایی خمشی z تیر بر حسب مدلهای فرض شده Q_1 , Q_2 به وسیله رابطه $z=(\frac{x}{l})^{2}q_1+(\frac{x}{l})^{2}q_2$ که در آن x فاصله از انتهای مفصل شده است.

انرژی پتانسیل ذخیره ای یک تیر در حال خمش به وسیله رابطه $U=\frac{1}{2}\int_0^l EI(\frac{d^{2}z}{dx^{2}})^{2}dx$ داده می‌شود.

معادلات حرکت را برحسب Q_1 , Q_2 نوشته و فرکانسهای طبیعی ارتعاش را تعیین کنید:

باتوجه به المنت شکل داریم: $dm=\rho dx$

انرژی جنبشی (T):

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mV^2$$

چون جهت حرکت روی z می باشد.

$$T = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 \Longrightarrow dT = \frac{1}{2}\dot{z}^2 dm$$

$$dT = \frac{1}{2}\rho\dot{z}^2 dx \Longrightarrow T = \frac{1}{2}\rho\int_0^l \left[(\frac{x}{l})^2\dot{q}_1^2 + (\frac{x}{l})^4\dot{q}_2^2 + 2(\frac{x}{l})^3\dot{q}_1\dot{q}_2\right] dx =$$

$$\frac{1}{2}\rho\left[\frac{1}{3}\frac{x^3}{l^2}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{5}\frac{x^5}{l^4}\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}\frac{x^4}{l^3}\dot{q}_1\dot{q}_2\right]_0^l$$

بنابراین:

$$T = \frac{1}{2}\rho(\frac{1}{3}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{5}\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}\dot{q}_1\dot{q}_2)l$$

انرژی پتانسیل (U):

فنر U +تیرU= انرژی پتانسیل

Uتیر $= \frac{1}{2}EI\int_0^l(\frac{d^2z}{dx^2})^2dx, U$ فنر $= \frac{1}{2}k(z\mid_{x=l})^2$

$$U = \frac{1}{2}EI\int_0^l(\frac{d^2z}{dx^2})^2dx + \frac{1}{2}k(z\mid_{x=l})^2$$

$$\frac{dz}{dx} = 2\frac{x}{l^2}q_1 + 2\frac{x}{l^2}q_2 \Longrightarrow \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{2}{l^2}q_1 + \frac{2}{l^2}q_2$$

باجایگذاری داریم:

$$U = \frac{2EI}{l}[q_1^2 + 2q_1q_2 + q_2^2] + \frac{1}{2}(\frac{4EI}{l})(q_1 + q_2)^2 \Longrightarrow$$

$$U = \frac{2EI}{l}(q_1^2 + 2q_1q_2 + 2q_2^2)$$

بنابراین معادله حرکت به صورت لاگرانژ $(Lagrange)$ برای سیستم به صورت:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}) + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \Longrightarrow$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_۱}) + \frac{\partial U}{\partial q_۱} = ۰ \qquad (۱)$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_۲}) + \frac{\partial U}{\partial q_۲} = ۰ \qquad (۲)$$

دراین صورت ازدورابطه بدست آمده بالا داریم:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_۱} = \frac{۱}{۲}\rho(\frac{۲}{۳}\dot{q}_۱ + \frac{۱}{۲}\dot{q}_۲)l$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_۱}) = \frac{۱}{۲}\rho(\frac{۲}{۳}\ddot{q}_۱ + \frac{۱}{۲}\ddot{q}_۲)l$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_۱} = \frac{۸EI}{l}(q_۱ + q_۲)$$

$$(۱) \quad (\frac{۱}{۳}\ddot{q}_۱ + \frac{۱}{۴}\ddot{q}_۲)\rho l + \frac{۸EI}{l}(q_۱ + q_۲) = ۰$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_۲} = \frac{۱}{۲}\rho(\frac{۲}{۵}\dot{q}_۲ + \frac{۱}{۲}\dot{q}_۱)l$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_۲}) = \frac{۱}{۲}\rho(\frac{۲}{۵}\ddot{q}_۲ + \frac{۱}{۲}\ddot{q}_۱)l$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_۲} = \frac{۸EI}{l}(q_۱ + q_۲)$$

$$(۲) \quad (\frac{۱}{۴}\ddot{q}_۱ + \frac{۱}{۵}\ddot{q}_۲)\rho l + \frac{۸EI}{l}(q_۱ + q_۲) = ۰$$

اگرساده سازی کنیم وبه شکل ماتریسی بنویسیم:

$$\rho l \begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} \\ \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_۱ \\ \ddot{q}_۲ \end{Bmatrix} + \frac{۸EI}{l} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_۱ \\ q_۲ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{Bmatrix}$$

اگربه صورت استاندارد بنویسیم:

$$\begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} \\ \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_۱ \\ \ddot{q}_۲ \end{Bmatrix} + \frac{۸EI}{\rho l^۲} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_۱ \\ q_۲ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{Bmatrix}$$

دراین صورت برای ساده سازی: $\frac{۸EI}{\rho l^۲} = \beta$

همانطورکه مشاهده می شود ماتریس جرم وسختی غیرقطری است پس (غیرکوپله)می

باشد.

بدست آوردن فرکانسهای طبیعی ω و مُدها ϕ ارتعاش:

برای این کار باید ماتریس جرم $[M]$ را در $-\omega^{2}$ ضرب و با ماتریس سختی $[K]$ جمع کرد.

$$\begin{bmatrix} \beta - \frac{1}{3}\omega^{2} & \beta - \frac{1}{4}\omega^{2} \\ \beta - \frac{1}{4}\omega^{2} & \beta - \frac{1}{5}\omega^{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{1} \\ Q_{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

نحوه بدست آمدن ماتریس فوق:

جوابهای ما هارمونیک $(sinusoidal)$ است. بنابراین:

$$\begin{Bmatrix} q_{1} \\ q_{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{1} \\ Q_{2} \end{Bmatrix} \sin \omega t$$

اگر دو بار نسبت به زمان مشتق گیری کنیم و در معادله اصلی قرار دهیم:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{q}_{1} \\ \ddot{q}_{2} \end{Bmatrix} = -\omega^{2} \begin{Bmatrix} Q_{1} \\ Q_{2} \end{Bmatrix} \sin \omega t$$

$$-\omega^{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{1} \\ Q_{2} \end{Bmatrix} \sin \omega t + \frac{8EI}{\rho l^{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{1} \\ Q_{2} \end{Bmatrix} \sin \omega t = \{0\}$$

پس از ساده کردن $\sin \omega t$ از معادله بالا اگر دترمینان آن را مساوی صفر قرار دهیم.

$$\det \begin{bmatrix} \beta - \frac{1}{3}\omega^{2} & \beta - \frac{1}{4}\omega^{2} \\ \beta - \frac{1}{4}\omega^{2} & \beta - \frac{1}{5}\omega^{2} \end{bmatrix} = 0$$

$$(\beta - \frac{1}{3}\omega^{2})(\beta - \frac{1}{5}\omega^{2}) - (\beta - \frac{1}{4}\omega^{2})^{2} = 0 \Longrightarrow$$

$$0.0041\omega^{4} - 0.033\beta\omega^{2} = 0$$

اگر مسئله را عددی $(Numerical)$ کنیم. فرکانسهای طبیعی ω و مُدها ϕ ارتعاش:

$$\omega_{1}^{2} \quad ,\omega \quad {}_{2}^{2} = \frac{0.033\beta^{2}}{0.0041} = 8.04\beta^{2}$$

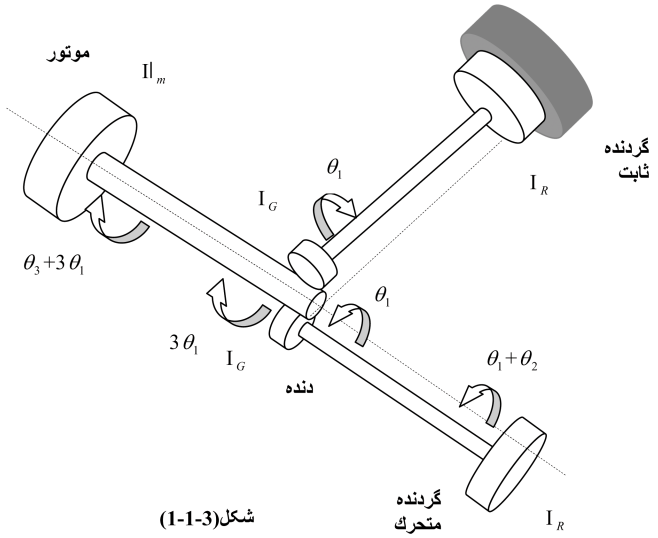
$$\frac{Q_{1}}{Q_{2}} |_{\omega=\omega_{1}} = \{\phi_{1}\} \quad , \quad \frac{Q_{1}}{Q_{2}} |_{\omega=\omega_{2}} = \{\phi_{2}\}$$

۳ — ۱ — یک موتورالکتریکی مطابق شکل دو گردنده یکسان را از طریق یک جعبه دنده کاهنده ۳ به ۱ $(\frac{۳}{۱})$ می گرداند. اگر یکی از گردنده ها ثابت شود و داشته باشیم:

$$I_m = ٦\frac{Kg}{m^۲}\ ,I_G = ۴\frac{Kg}{m^۲}\ ,I_R = ۴۰\frac{Kg}{m^۲}$$

ممان اینرسی موتور I_m وممان اینرسی هر گردنده $K_R = ۵ \times ۱۰^۵ \frac{N.m}{Rad}$ و سختی پیچشی هرشفت گردنده $K_m = ۳۰ \times ۱۰^۵ \frac{N.m}{Rad}$ می باشد.

سختی پیچشی هر شفت موتور، معادلات دیفرانسیل نوسانات پیچشی سیستم را نوشته و چنانچه کوچکترین فرکانس طبیعی $\omega_۱ = ٦۴.۲ \frac{Rad}{S}$ باشد. بردار ویژه $(EigenVector)$ متناظر با این فرکانس را تعیین کنید.



شکل(1-1-3)

باتوجه به شکل:

ارتعاش از نوع پیچشی با ۳ درجه آزادی می باشد.

بااستفاده از روش لاگرانژ $(lagrange)$:

باید انرژی جنبشی (T) وانرژی پتانسیل (U) رابنویسیم.

انرژی جنبشی (T) :که از نوع دورانی است.

$$T = \frac{۱}{۲}I\dot{\theta}$$

$$T = \frac{۱}{۲}I_G\dot{\theta}_۱^۲ + \frac{۱}{۲}I_G\dot{\theta}_۱^۲ + \frac{۱}{۲}I_R(\dot{\theta}_۱^۲ + \dot{\theta}_۲^۲) + \frac{۱}{۲}I_m(\dot{\theta}_۳ + ۳\dot{\theta}_۱)^۲ \Longrightarrow$$

$$= ۴\dot{\theta}_۱^۲ + ۲۰(\dot{\theta}_۱ + \dot{\theta}_۲)^۲ + ۳(\dot{\theta}_۳ + ۳\dot{\theta}_۱)^۲ \Longrightarrow$$

$$T = ۵۱\dot{\theta}_۱^۲ + ۲۰\dot{\theta}_۲^۲ + ۴۰\dot{\theta}_۱\dot{\theta}_۲ + ۳\dot{\theta}_۳^۲ + ۱۸\dot{\theta}_۱\dot{\theta}_۳$$

انرژی پتانسیل (U) :که مربوط به سختی پیچشی شفت می باشد.

$$U = \frac{۱}{۲}K\theta^۲$$

$$U = \frac{۱}{۲}K_R\theta_۱^۲ + \frac{۱}{۲}k_R\theta_۲^۲ + \frac{۱}{۲}K_m\theta_۳^۲ = (\frac{۵}{۲}\theta_۱^۲ + \frac{۵}{۲}\theta_۲^۲ + ۱۵\theta_۳^۲) \times ۱۰^۵ \Longrightarrow$$

$$U = (۲.۵\theta_۱^۲ + ۲.۵\theta_۲^۲ + ۱۵\theta_۳^۲) \times ۱۰^۵$$

معادله حرکت لاگرانژ $(lagrange)$ برای سیستم به صورت:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}) - \underbrace{\frac{\partial T}{\partial q_i}}_{=۰} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \underbrace{\frac{\partial D.E}{\partial \dot{q}_i}}_{=۰} = \underbrace{Q_i(t)}_{=۰}$$

در این صورت معادله لاگرانژ $(lagrange)$:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}) + \frac{\partial U}{\partial q_i} = ۰ \qquad if q_۱ = \theta_۱ , q_۲ = \theta_۲ , q_۳ = \theta_۳$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_۱}) + \frac{\partial U}{\partial \theta_۱} = ۰ \Longrightarrow ۱۰۲\ddot{\theta}_۱ + ۴۰\ddot{\theta}_۲ + ۱۸\ddot{\theta}_۳ + ۵ \times ۱۰^۵\theta_۱ = ۰$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_۲}) + \frac{\partial U}{\partial \theta_۲} = ۰ \Longrightarrow ۴۰\ddot{\theta}_۲ + ۴۰\ddot{\theta}_۱ + ۵ \times ۱۰^۵\theta_۲ = ۰$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_۳}) + \frac{\partial U}{\partial \theta_۳} = ۰ \Longrightarrow ٦\ddot{\theta}_۳ + ۱۸\ddot{\theta}_۱ + ۳۰ \times ۱۰^۵\theta_۳ = ۰$$

معادلات دیفرانسیل حرکت بدست آمد. حال آنها را به صورت ماتریسی می نویسیم.

$$\begin{bmatrix} ۱۰۲ & ۴۰ & ۱۸ \\ ۴۰ & ۴۰ & ۰ \\ ۱۸ & ۰ & ٦ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_۱ \\ \ddot{\theta}_۲ \\ \ddot{\theta}_۳ \end{Bmatrix} + ۵ \times ۱۰^۵ \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ٦ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_۱ \\ \theta_۲ \\ \theta_۳ \end{Bmatrix} = \{۰\}$$

همانطورکه مشاهده می‌شود کوپلینگ ازنوع دینامیکی می‌باشد.

یکی از فرکانسهای طبیعی را داریم بنابراین بردارمتناظر با آن فرکانس را بدست می آوریم. برای پیدا کردن فرکانسهای طبیعی سیستم ماتریس جرم $[M]$ رادر $(-\omega^2)$ ضرب وبا عناصر آن (ماتریس سختی $[K]$) جمع می کنیم ودترمینان آن رامساوی صفرقرارمی دهیم.

$$\det\begin{bmatrix} -102\omega^2+5\times10^5 & -40\omega^2 & -18\omega^2 \\ -14\omega^2 & -40\omega^2+5\times10^5 & 0 \\ -18\omega^2 & 0 & -6\omega^2+30\times10^{-5} \end{bmatrix}=0$$

حال مابرداروِیژه ($EigenVector$) رابرای فرکانس $\omega_1 = 64.2\,\frac{Rad}{S}$ می خواهیم.

$$\begin{bmatrix} -102\omega^2+5\times10^5 & -40\omega^2 & -18\omega^2 \\ -14\omega^2 & -40\omega^2+5\times10^5 & 0 \\ -18\omega^2 & 0 & -6\omega^2+30\times10^{-5} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \bar\theta_1 \\ \bar\theta_2 \\ \bar\theta_3 \end{Bmatrix}=\{0\}$$

حال بایدازیکی ازمعادله‌ها جواب رابدست آوریم.
معادله های ۲و۳ مناسب‌ترمی باشند.

$$-40\omega^2\bar\theta_1+(5\times10^5-40\omega^2)\bar\theta_2=0 \qquad (2)$$

$$-18\omega^2\bar\theta_1+(30\times10^5-6\omega^2)\bar\theta_3=0 \qquad (3)$$

$$(2)\Longrightarrow \qquad \frac{\bar\theta_2}{\bar\theta_1}=\frac{40\omega^2}{5\times10^5-40\omega^2}\Big|_{\omega_1=64.2}=0.49$$

$$(3)\Longrightarrow \qquad \frac{\bar\theta_3}{\bar\theta_1}=\frac{18\omega^2}{30\times10^5-6\omega^2}\Big|_{\omega_1=64.2}=0.025$$

$$\{\phi_1\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 0.49 \\ 0.025 \end{Bmatrix}\Longrightarrow \omega_1=64.2\,\frac{Rad}{S}$$

روش کلاسیک $(Classic)$ برای بدست آوردن فرکانسهای طبیعی ω و مُدها ϕ ارتعاش:

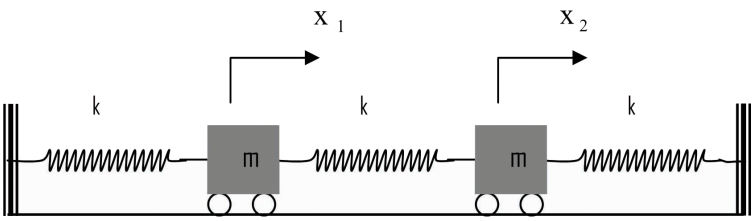
در این روش معادله حرکت را براساس ماتریس جرم $[M]$ و سختی $[K]$ نوشته سپس ماتریس جرم $[M]$ را در $-\omega^2$ ضرب کرده و با ماتریس سختی $[K]$ جمع می کنیم. حال با دترمینان گرفتن از این ماتریس فرکانس طبیعی سیستم به صورت کلاسیک $(Classic)$ بدست می آید.

$$[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=0 \Longrightarrow [-\omega^2[M]+[K]]\{X\}=0$$

$$\det[-\omega^2[M]+[K]]=0$$

روش تکراری $(IterationMethod)$ برای بدست آوردن فرکانسهای طبیعی ω و مُدها ϕ ارتعاش:

۴ – ۱ – سیستم دو درجه آزادی زیر را در نظر بگیرید ابتدا به صورت معمولی و سپس به روش تکرار $(IterationMethod)$ فرکانسهای طبیعی سیستم را بدست آورید:



شکل(4-1-1)

براساس قانون دوم نیوتون $(SecondLawNewton)$ داریم:

$$\sum F_x = ma_x = m\ddot{x}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2Kx_1 - Kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - Kx_1 + 2Kx_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

پس به روش کلاسیک داریم:

$$\begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{bmatrix} = 0 \Longrightarrow \omega_1{}^2 = \frac{k}{m}, \omega_2{}^2 = \frac{3k}{m}$$

حال بردارهای ویژه ($EigenVector$) رابدست می آوریم:

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{k}{2k - m\omega^2} \Longrightarrow \frac{X_1}{X_2}\Big|_{\omega=\omega_1} = 1 \ , \ \{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{X_1}{X_2}\Big|_{\omega=\omega_2} = -1 \ , \ \{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

اگر درجه آزادی سیستم ۱۰ بود در این صورت ماتریس ما ۱۰ × ۱۰ و به دست آوردن فرکانسهای طبیعی سیستم مشکل می شد.

بنابراین به روش تکراری ($IterationMethod$) قادر خواهیم بود فرکانسهای طبیعی یک سیستم با درجه آزادی بالا را بدست آوریم.

به روش تکراری ($IterationMethod$) :

$$[k] = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}$$

معکوس ($Inverse$) ماتریس سختی k رابدست می آوریم:

$$Cofactor = \begin{bmatrix} 2kk & \\ k & 2k \end{bmatrix} \ , Transpose \ = \begin{bmatrix} 2kk & \\ k & 2k \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} = 0 \Longrightarrow \det[k] = 3k^2$$

در این صورت ماتریس معکوس:

$$[k]^{-1} = \frac{1}{3k} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

حال ماتریس دینامیکی ($DynamicMatrix$) $[D]$ بدست می آوریم:

$$[D] = [M][k]^{-1} \Longrightarrow [D] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3k} & \frac{1}{3k} \\ \frac{1}{3k} & \frac{2}{3k} \end{bmatrix} = \frac{m}{3k} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

حرکات ماها رمونیک است. یعنی: $\{x\} = \{X\}\sin\omega t$

بادوبارمشتق‌گیری داریم: $\{\ddot{x}\} = -\omega^{۲}\{X\}\sin\omega t$

$$(-\omega^{۲}[M]\{X\} + [K]\{X\})\sin\omega t = \{۰\}$$

$\sin\omega t \neq ۰$ نمی‌تواند صفر باشد لذا خواهیم داشت:

$$-\omega^{۲}[M]\{X\} + [K]\{X\} = ۰$$

طرفین رابطه را در $[k]^{-۱}$ ضرب می‌کنیم:

$$-\omega^{۲}\underbrace{[M][k]^{-۱}}_{[D]}\{X\} + \underbrace{[k][k]^{-۱}}_{I}\{X\} = \{۰\}$$

$$-\omega^{۲}[D]\{X\} + \{X\} = \{۰\} \Longrightarrow -\omega^{۲}[D]\{X\} = \{X\}$$

بنابراین $(VectorX)$ را می‌توان پیدا کرد.

بدست آوردن فرکانس ω و مُد ϕ متناظر به (روش تقریبی) توسط رابطه $-\omega^{۲}[D]\{X\} = \{X\}$:

$$\frac{m\omega^{۲}}{۳k}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_۱ \\ X_۲ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_۱ \\ X_۲ \end{Bmatrix}$$

در این روش بردار ویژه $(EigenVector)$ را حدس می‌زنیم $= (InitialGuessVector)$ وسپس بعد از تکرار روش به جواب مورد نظر می‌رسیم.

اگر حدس اولیه $(InitialGuessVector)$ به جواب نزدیک باشد زودتر به جواب می‌رسیم وبالعکس.

$$\frac{m\omega^{۲}}{۳k}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_۱ \\ X_۲ \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} X_۱ \\ X_۲ \end{Bmatrix} = InitialGuessVector$$

بنابراین حدس اولیه $(InitialGuessVector)$ را به دلخواه انتخاب می‌کنیم:

$$\begin{Bmatrix} X_۱ \\ X_۲ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{Bmatrix}$$

$$\frac{m\omega^{۲}}{۳k}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} ۷ \\ ۸ \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{۷}{۸} \\ ۱ \end{Bmatrix} \Longrightarrow^{Continue}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{۲۲}{۸} \\ \frac{۲۳}{۸} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{۲۲}{۲۳} \\ ۱ \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{۶۷}{۲۳} \\ \frac{۶۸}{۲۳} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{۶۷}{۶۸} \\ ۱ \end{Bmatrix} \Longrightarrow^{Continue}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{۲۰۲}{۶۸} \\ \frac{۲۰۳}{۶۸} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{۲۰۲}{۲۰۳} \\ ۱ \end{Bmatrix}$$

که تقریب مناسب است.

چون: $\frac{۲۰۲}{۲۰۳} = ۰.۹۹۵$, $\frac{۶۷}{۶۸} = ۰.۹۸۵$ که به یکدیگر نزدیک می باشند.

(تذکر:) اگر در بدست آوردن اعداد اشتباه شود، مشکلی به وجود نخواهد آمد. زیرا دو عدد بدست آمده مانند حدس اولیه ($InitialGuessVector$) به شمار خواهند رفت و پس از طی مراحل دوباره به جواب خواهیم رسید.

مثلا در مورد قبل اگر اشتباه کنیم:

$$\frac{m\omega^{۲}}{۳k} \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} ۷ \\ ۸ \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{۷}{۸} \\ ۱ \end{Bmatrix} \Longrightarrow^{Continue}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{۲۲}{۸} \\ \frac{۲۳}{۸} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{۲۲}{۲۳} \\ ۱ \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{۶۷}{۲۳} \\ \frac{۶۶}{۲۳} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} ۱ \\ \frac{۶۶}{۶۷} \end{Bmatrix} \Longrightarrow^{Continue}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{۲۰۰}{۶۷} \\ \frac{۱۹۹}{۶۷} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} ۱ \\ \frac{۱۹۹}{۲۰۰} \end{Bmatrix}$$

مشاهده می شود که در $\begin{Bmatrix} \frac{۶۷}{۲۳} \\ \frac{۶۶}{۲۳} \end{Bmatrix}$ خطا صورت گرفته است و با وجود این پس از طی مراحل فوق جواب حاصل شده و تقریب خوب می باشد.

چون: $\frac{۱۹۹}{۲۰۰} = ۰.۹۹۵$, $\frac{۶۶}{۶۷} = ۰.۹۸۵$ که به یکدیگر نزدیک می باشند.

نحوه انجام مراحل فوق:

۱—ابتدا ماتریس ۲ × ۲ دینامیکی ($DynamicMatrix$)، در حدس اولیه ($InitialGuessVector$) ضرب می شود که حاصل یک ماتریس ۱ × ۲ می باشد.

۲ — دو عدد بدست آمده در ماتریس جدید ۱ × ۲ را به بزرگترین آنها تقسیم کرده و به عنوان حدس اولیه ($InitialGuessVector$) مرحله دوم قرار می دهیم.

۳—مراحل فوق را تکرار می کنیم تقریب مناسب گردد.

باتوجه‌به‌تقریب‌بدست‌آمده‌داریم:

$$\frac{m\omega^{۲}}{۳k}\begin{bmatrix} ۲۱ & \\ ۱۲ & \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} ۱ \\ \frac{۶۶}{۶۷} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ۱ \\ \frac{۱۹۹}{۲۰۰} \end{Bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\frac{۲۰۰}{۶۷}\frac{m\omega^{۲}}{۳k}\begin{Bmatrix} ۱ \\ \frac{۶۶}{۶۷} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ۱ \\ \frac{۱۹۹}{۲۰۰} \end{Bmatrix} \Longrightarrow \frac{۲۰۰}{۶۷}\frac{m\omega^{۲}}{۳k} = ۱$$

بنابراین‌فرکانس‌طبیعی‌سیستم ω و مُد ϕ بدست‌خواهند آمد:

$$\omega^{۲} = \frac{۲۰۱}{۲۰۰}\frac{k}{m} = ۱.۰۰۵\frac{k}{m} \quad , \quad \{\phi_{۱}\} = \begin{Bmatrix} ۱ \\ \frac{۱۹۹}{۲۰۰} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ۱ \\ ۰.۹۹۵ \end{Bmatrix}$$

همانطور که مشاهده می شود فرکانس و مُد کوچکتر بدست آمده. برای بدست آوردن فرکانس و مُد بزرگتر باید، باردیگر ماتریس $[M]$را معکوس $(Inverse)$ کنیم و مراحل را مانندقبل‌ادامه‌دهیم.

حال‌فرکانس ω و مُدبزرگتر $\phi_{۲}$ رابه‌دست‌می‌آوریم:به(روش‌تقریبی)

$$[M]^{-۱} = \frac{۱}{m}\begin{bmatrix} ۱۰ & \\ ۰۱ & \end{bmatrix} \Longrightarrow [B] = [M]^{-۱}[k] = \frac{k}{m}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱۲ & \end{bmatrix}$$

$$[M]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{۰\}$$

حرکات‌ماهارمونیک‌است.یعنی: $\{x\} = \{X\}\sin\omega t$

بادوبارمشتق‌گیری‌داریم: $\{\ddot{x}\} = -\omega^{۲}\{X\}\sin\omega t$

$$-\omega^{۲}[M]\{X\} + [k]\{X\} = \{۰\}$$

طرفین‌رابطه‌رادر $[M]^{-۱}$ ضرب‌می‌کنیم:

$$-\omega^{۲}\underbrace{[M][M]^{-۱}}_{[I]}\{X\} + \underbrace{[k][M]^{-۱}}_{[B]}\{X\} = \{۰\}$$

$$-\omega^{۲}\{X\} + [B]\{X\} = \{۰\} \Longrightarrow \frac{۱}{\omega^{۲}}[B]\{X\} = \{X\}$$

بنابراین $(VectorX)$ رامی‌توان‌پیداکرد.

بدست آوردن فرکانس ω و مُد ϕ متناظر: به(روش تقریبی)توسط رابطه $\frac{۱}{\omega^۲}[B]\{X\} = \{X\}$:

$$\frac{k}{m\omega^۲}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_۱ \\ X_۲ \end{Bmatrix}$$

حدس اولیه($Initial\ Guess\ Vector$) را به دلخواه انتخاب می کنیم :

$$\begin{Bmatrix} X_۱ \\ X_۲ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{Bmatrix}$$

$$\frac{k}{m\omega^۲}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} ۱ \\ ۴ \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{۱}{۴} \\ ۱ \end{Bmatrix} \Longrightarrow^{Continue}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{-۲}{۴} \\ \frac{۷}{۴} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{-۲}{۷} \\ ۱ \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{-۱۱}{۷} \\ \frac{۱۶}{۷} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{-۱۱}{۱۶} \\ ۱ \end{Bmatrix} \Longrightarrow^{Continue}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{-۳۸}{۱۶} \\ \frac{۴۳}{۱۶} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{-۳۸}{۴۳} \\ ۱ \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{-۱۱۹}{۴۳} \\ \frac{۱۲۴}{۴۳} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{-۱۱۹}{۱۲۴} \\ ۱ \end{Bmatrix} \Longrightarrow^{Continue}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{-۳۶۲}{۱۲۴} \\ \frac{۳۶۷}{۱۲۴} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{-۳۶۲}{۳۶۷} \\ ۱ \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{-۱۰۹۱}{۳۶۷} \\ \frac{۱۰۹۶}{۳۶۷} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{-۱۰۹۱}{۱۰۹۶} \\ ۱ \end{Bmatrix}$$

تقریب خوب می باشد.

چون :$\frac{-۱۰۹۱}{۱۰۹۶} = -۰.۹۹$, $\frac{-۳۶۲}{۳۶۷} = -۰.۹۸$ که به یکدیگر نزدیک می باشند.

$$\frac{k}{m\omega^۲}\left[\frac{۱۰۹۶}{۳۶۷}\right] = ۱$$

بنابر این فرکانس طبیعی سیستم ω و مُد $\phi_۲$ بدست خواهند آمد:

$$\omega^۲ = \frac{۱۰۹۶}{۳۶۷}\frac{k}{m} = ۲.۹۸\frac{k}{m} \quad , \quad \{\phi_۲\} = \begin{Bmatrix} -۰.۹۹ \\ ۱ \end{Bmatrix}$$

روش بـ ارواحـد $(UnitLoadMethod)$ بـرای بدسـ ت آوردن فرکانسهـ ای طبیعی ω و مُدها ϕ ارتعاش:

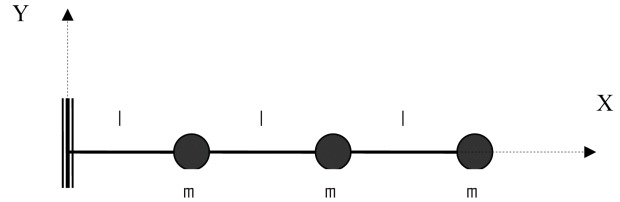
دراین روش بااستفاده ازماتریس نرمی $(FlexibilityMatrix)$ $[A] = [k]^{-1} =$ وماتریس سختی $[k]$ فرکانسهای طبیعی ω و مُدها ϕ رابدست خواهیم آورد.

همانطور که مشاهده می شود اگر ماتریس سختی $[k]$ راداشته باشیم معکوس $(Inverse)$ آن ماتریس نرمی $[A]$ می‌شود.

بنابراین ماتریس دینامیکی $(DynamicMatrix)$ با تعریف جدید به صورت : $[D] = [M][k]^{-1} = [M][A]$ درمی آید.

۵—۱—اگر یک تیر یک سرگیردارداشته باشیم و این تیر را با سه جرم وتده ای مدل کرده باشیم.دراین صورت به روش بارواحد $(UnitLoadMethod)$ فرکانسهای طبیعی ω و مُدها ϕ رابه‌دست آورید:

میله‌هاباطول l وجرمی‌ندارند $(MassLess)$.



شکل(5-1-1)

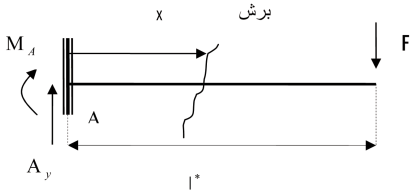
ما می خواهیم روی ماتریس نرمی $[A]$ کار کنیم بنابراین چون ماتریس سختی $[k]$ وجرم $[M]$ ، ۳ × ۳ هستند.پس بدیهی است که ماتریس نرمی $[A]$ نیز ۳ × ۳ است .

پیش زمینه (قدم اول):

ابتدا باتوجه به مقاومت مصالح داریم:

اگر یک تیر یک سرگیردارداشته باشیم به طول l^* که درانتهای آزاد تحت تاثیر نیروی F قرارگرفته‌است.

تحلیل استاتیکی درانتهای گیردار مولفه‌های عمل رابدست می آوریم:



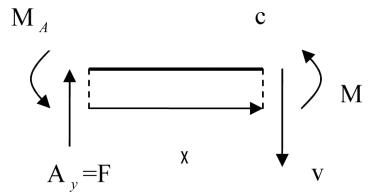
شکل(5-1-2)

$$\sum F_y = ۰ \Longrightarrow A_y - F = ۰ \Longrightarrow A_y = F$$

$$\sum M_A = ۰ \Longrightarrow Fl^\star + M_A = ۰ \Longrightarrow M_A = -Fl^\star$$

قدم دوم :

تیر را در فاصله x برش می دهیم.



شکل(3-1-5)

$$\sum F_y = ۰ \Longrightarrow V = F$$

$$\sum M_C = ۰ \Longrightarrow M - Fx + Fl^\star = ۰ \Longrightarrow M = F(x - l^\star)$$

$$M = EI\frac{d^۲y}{dx^۲} = EI\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = F(x - l^\star) \Longrightarrow$$

$$EI\frac{dy}{dx} = \int F(x - l^\star)dx = \frac{۱}{۲}Fx^۲ - Fl^\star x + C_۱$$

$$From\ b.c\ at\ x = ۰\ We\ get\ :\ C_۱ = ۰$$

$$EIy = \frac{۱}{۶}Fx^۳ - \frac{۱}{۲}Fl^\star x^۲ + C_۲$$

$$From\ b.c\ at\ x = ۰\ We\ get\ :\ C_۲ = ۰$$

بنابر این :

$$y = \frac{۱}{EI}(\frac{۱}{۶}Fx^{۳} - \frac{۱}{۲}Fl^{*}x^{۲})$$

خیز تیر بر اساس نیرو در انتهای آزاد است .

قدم سوم:

حال باید با استفاده از این رابطه ماتریس نرمی $[A]$ را بدست آوریم و روش بار واحد $(Unit\ Load\ Method)$ را شروع کنیم .

$$F = ky$$

اگر دو طرف رابطه بالا را بر y تقسیم کنیم ماتریس سختی $[k]$ بدست می آید حال اگر آن را معکوس $(Inverse)$ کنیم ، حاصل ماتریس نرمی $[A]$ خواهد شد.

$$\frac{F}{y} = k \Longrightarrow \frac{y}{F} = k^{-۱}$$

$$[A] = [k]^{-۱} = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

چون ماتریس نرمی $[A]$ یک ماتریس متقارن$([A] = Symmetric\ Matrix)$ است .

$$But\ \ :\ a_{۲۱} = a_{۱۲}\ ,\ a_{۱۳} = a_{۳۱}\ ,\ a_{۲۳} = a_{۳۲}$$

روش بار واحد $(Unit\ Load\ Method)$:

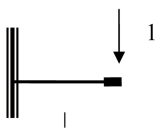
با توجه به شکل، سه جرم توده ای داریم .

بنابر این ۳ ایستگاه برای قرار دادن بار واحد$(Unit\ Load)$ خواهیم داشت و برای هر ایستگاه با توجه به قرار گرفتن با واحد $(Unit\ Load)$ چند جابجایی داریم.

به همین خاطر اندیس اول مولفه های ماتریس نرمی $[A]$ مربوط به بار واحد$(Unit\ Load)$ و اندیس دوم آن مربوط به جابجایی $(Move)$ x می باشد.

$$a_{ij} \qquad\qquad i = (Unit\ Load)\ ,\ j = x(Move)$$

ابتدا بار واحد$(Unit\ Load)$ را روی ایستگاه ۱ قرار می دهیم:

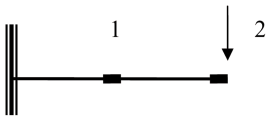


شکل(4-1-5)

بار واحد($Unit\ Load$) در ایستگاه ۱ ، جابجایی در ایستگاه ۱ ، در اینصورت:
$x = l\ ,\ l^{\star} = l$

$$a_{۱۱} = \frac{۱}{EI}\left[\frac{۱}{۶}l^{۳} - \frac{۱}{۲}l^{۳}\right] = -\frac{l^{۳}}{۳EI}$$

بار واحد($Unit\ Load$) را روی ایستگاه ۲ قرار می دهیم:



شکل(5-1-5)

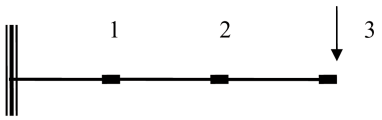
بار واحد($Unit\ Load$) در ایستگاه ۲ ، جابجایی در ایستگاه ۱ ، در اینصورت:
$x = l\ ,\ l^{\star} = ۲l$

$$a_{۲۱} = \frac{۱}{EI}\left[\frac{۱}{۶}l^{۳} - \frac{۱}{۲}(۲l)l^{۲}\right] = -\frac{۵l^{۳}}{۶EI}$$

بار واحد($Unit\ Load$) در ایستگاه ۲ ، جابجایی در ایستگاه ۲ ، در اینصورت:
$x = ۲l\ ,\ l^{\star} = ۲l$

$$a_{۲۲} = \frac{۱}{EI}\left[\frac{۱}{۶}(۲l^{۲}) - \frac{۱}{۲}(۲l)(۲l)^{۲}\right] = -\frac{۸l^{۳}}{۳EI}$$

بار واحد($Unit\ Load$) را روی ایستگاه ۳ قرار می دهیم:



شکل(6-1-5)

بار واحد($Unit\ Load$) در ایستگاه ۳ ، جابجایی در ایستگاه ۱ ، در اینصورت:
$x = l\ ,\ l^{\star} = ۳l$

$$a_{۳۱} = \frac{۱}{EI}\left[\frac{۱}{۶}(l)^{۳} - \frac{۱}{۲}(۳l)(l)^{۲}\right] = -\frac{۴l^{۳}}{۳EI}$$

بار واحد($Unit\ Load$) در ایستگاه ۳ ، جابجایی در ایستگاه ۲ ، در اینصورت:
$x = ۲l\ ,\ l^{\star} = ۳l$

$$a_{۳۲} = \frac{۱}{EI}\left[\frac{۱}{۶}(۲l)^{۳} - \frac{۱}{۲}(۳l)(۲l)^{۲}\right] = -\frac{۱۴l^{۳}}{۳EI}$$

بـ اروا حـد($UnitLoad$) درایـسـتـگـا ه ۳ ، جـابـجـایـ ی درایـسـتـگـ ـا ه ۳،درایـنـصـورت:

$x = ۳l \ , \ l^{\star} = ۳l$

$$a_{۳۳} = \frac{۱}{EI}\left[\frac{۱}{۶}(۳l)^{۳} - \frac{۱}{۲}(۳l)(۳l)^{۲}\right] = -\frac{۹l^{۳}}{EI}$$

بنابرمتقارن‌بودن‌ماتریس‌نرمی ($[A] = SymmetricMatrix$) ریـ م :

$$[k]^{-۱} = \frac{l^{۳}}{۶EI}\begin{bmatrix} ۲۵۸ & & \\ ۵۱۶۲۸ & & \\ ۸۲۸۵۴ & & \end{bmatrix}$$

براین‌اساس‌ماتریس‌جرم $[M]$ می‌شود:

$$[M] = m\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

براساس‌معادله‌دیفرانسیل‌حرکت:

$$[M]\{\ddot{y}\} + [k]\{y\} = ۰$$

درادامه باید فرکانسها ی طبیعی و بردارها ی ویژ ه متناظر با هر فرکانس طبیعی را بدست آ و ر ی م .

حرکات‌ماهارمونیک‌است.یعنی: $\{y\} = \{Y\}\sin\omega t$

بادوبارمشتق‌گیری‌داریم: $\{\ddot{y}\} = -\omega^{۲}\{Y\}\sin\omega t$

$$(-\omega^{۲}[M]\{Y\} + [K]\{Y\})\sin\omega t = \{۰\}$$

$\sin\omega t \neq ۰$ نمی‌تواندصفرباشدلذاخواهیم‌داشت:

$$-\omega^{۲}[M]\{Y\} + [K]\{Y\} = ۰$$

طرفین‌رابطه‌رادر $[k]^{-۱}$ ضرب‌می‌کنیم:

$$-\omega^{۲}\underbrace{[M][k]^{-۱}}_{[D]}\{Y\} + \underbrace{[k][k]^{-۱}}_{I}\{Y\} = \{۰\}$$

$$-\omega^{۲}[D]\{Y\} + \{Y\} = \{۰\} \Longrightarrow \omega^{۲}[D]\{Y\} = \{Y\}$$

بنابراین $(VectorY)$ رامی‌توان‌پیداکرد.

بدست آوردن‌فرکانس ω و مُد ϕ متناظر به(روش تقریبی)توسط رابطه $-\omega^{۲}[D]\{Y\} = \{Y\}$:

$$\frac{ml^{۳}}{۶EI}\omega^{۲}\begin{bmatrix} ۲۵۸ & & \\ ۵۱۶۲۸ & & \\ ۸۲۸۵۴ & & \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Y_{۱} \\ Y_{۲} \\ Y_{۳} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_{۱} \\ Y_{۲} \\ Y_{۳} \end{Bmatrix}$$

اگرمانندمثال‌قبل‌ادامه‌دهیم $(InitialGuessVector) = \begin{Bmatrix} Y_{۱} \\ Y_{۲} \\ Y_{۳} \end{Bmatrix}$

$$\frac{ml^{۳}}{۶EI}\omega^{۲}\begin{bmatrix} ۲۵۸ & & \\ ۵۱۶۲۸ & & \\ ۸۲۸۵۴ & & \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۱ \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} ۵ \\ ۱۷ \\ ۳۴ \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} ۰.۱۴۷ \\ ۰.۵ \\ ۱ \end{Bmatrix} \Longrightarrow^{Continue}$$

$$\begin{Bmatrix} ۱۰.۷۹ \\ ۳۶.۷۳ \\ ۶۹.۱۷ \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} ۰.۱۵۶ \\ ۰.۵۳۱ \\ ۱ \end{Bmatrix}$$

پس‌تقریب‌مناسب‌است.

بنابراین‌فرکانس‌طبیعی‌سیستم ω و مُد ϕ بدست‌خواهند آمد:

$$\omega_{۱} = ۰.۲۹\sqrt{\frac{EI}{ml^{۳}}} = (Numerical)\,۰.۶۵\frac{Rad}{S} \quad ,\phi_{۱} = \begin{Bmatrix} ۰.۱۶ \\ ۰.۵۳ \\ ۱ \end{Bmatrix}$$

طبق‌قضیه $Orthogonality$:

$$\{\phi_{۱}\}^{T}[M]\{\phi_{۲}\} = ۰ \Longrightarrow$$

$$[۰.۱۶۰ \quad .۵۳۰ \quad .۱]\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Y_{۱} \\ Y_{۲} \\ Y_{۳} \end{Bmatrix} = \{۰\}$$

حال‌معادله‌ای‌که‌سویپ $(Sweep)$ می‌کندبه‌دست‌می‌آید.

$$\begin{cases} ۰.۱۶Y_{۱} + ۰.۵۳Y_{۲} + Y_{۳} = ۰ \\ Y_{۲} = Y_{۲} \\ Y_{۳} = Y_{۳} \end{cases}$$

به وسیله معادله می توان ماتریس سوییپینگ ($[S] = Sweeping\ Matrix$) به دست آورد.

$$\begin{cases} Y_۱ = -\frac{۰.۵۳}{۰.۱۶}Y_۲ - \frac{۱}{۰.۱۶}Y_۳ \\ Y_۲ = Y_۲ \\ Y_۳ = Y_۳ \end{cases} \Longrightarrow [S_۱] = \begin{bmatrix} ۰ & \frac{-۰.۵۳}{۰.۱۶} & \frac{-۱}{۰.۱۶} \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

حال اگر ماتریس دینامیکی ($[D] = Dynamic\ Matrix$) را در سوییپینگ ماتریس ($[S] = Sweeping\ Matrix$) ضرب کنیم : ماتریس دینامیکی ۲ ($[D_۲] = Dynamic\ Matrix۲$) بدست خواهد آمد.

$$[D_۲] = [D_۱][S_۱]$$

$$[D_۲] = \frac{ml^۳}{۶EI}\begin{bmatrix} ۲ & ۵ & ۸ \\ ۵ & ۱۶ & ۲۸ \\ ۸ & ۲۸ & ۵۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & -۳.۴۰ & -۶.۴۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$[D_۲] = \frac{ml^۳}{۶EI}\begin{bmatrix} ۰ & -۱.۸ & -۴.۸۲ \\ ۰ & -۱ & -۴.۰۵ \\ ۰ & ۰.۸ & ۲.۷۲ \end{bmatrix}$$

حال بر اساس :

$$\omega^۲[D]\{Y\} = \{Y\}$$

$$\frac{ml^۳}{۶EI}\omega^۲\begin{bmatrix} ۰ & -۱.۸ & -۴.۸۲ \\ ۰ & -۱ & -۴.۰۵ \\ ۰ & ۰.۸ & ۲.۷۲ \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Y_۱ \\ Y_۲ \\ Y_۳ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_۱ \\ Y_۲ \\ Y_۳ \end{Bmatrix}$$

$$(Initial\ Guess\ Vector) = \begin{Bmatrix} Y_۱ \\ Y_۲ \\ Y_۳ \end{Bmatrix}$$

$$\frac{ml^۳}{۶EI}\omega^۲\begin{bmatrix} ۰ & -۱.۸ & -۴.۸۲ \\ ۰ & -۱ & -۴.۰۵ \\ ۰ & ۰.۸ & ۲.۷۲ \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} -۶.۶۲ \\ -۵.۰۵ \\ ۳.۵۳ \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} ۱ \\ ۰.۷۶ \\ -۰.۷۳ \end{Bmatrix} \Longrightarrow^{Continue}$$

$$\begin{Bmatrix} -۴.۸۷ \\ ۲.۱۹ \\ -۱.۳۸ \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} ۱ \\ -۰.۴۴ \\ -۰.۲۸ \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} ۲.۱۳ \\ -۰.۶۴ \\ ۰.۴۱ \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} ۱ \\ ۰.۳۰ \\ ۰.۱۹ \end{Bmatrix} \Longrightarrow^{Continue}$$

$$\begin{Bmatrix} ۰.۳۷۵ \\ -۱.۰۶ \\ ۰.۷۵ \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -۰.۳۵ \\ ۱ \\ -۰.۷۱ \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -۵.۲۲ \\ ۱.۸۷ \\ -۱.۱۲ \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} ۱ \\ -۰.۳۵ \\ ۰.۲۱ \end{Bmatrix} \Longrightarrow^{Continue}$$

$$\begin{Bmatrix} ۱.۶۴ \\ -۰.۵ \\ ۰.۲۹ \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} ۱ \\ -۰.۳۰ \\ ۰.۱۷ \end{Bmatrix}$$

پس تقریب مناسب است .

بنابر این فرکانس طبیعی سیستم ω و مُد ϕ بدست خواهند آمد:

$$\omega_۲ = ۱.۹۱\sqrt{\frac{EI}{ml^۳}}\frac{Rad}{S} \quad , \quad \phi_۲ = \begin{Bmatrix} ۱ \\ -۰.۳۰ \\ ۰.۱۷ \end{Bmatrix}$$

طبق قضیه $Orthogonality$:

$$\{\phi_۲\}^T[M]\{\phi_۳\} = ۰ \Longrightarrow$$

$$[\,۱ \quad -۰.۳۰ \quad ۰.۱۷\,] \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_۱ \\ Y_۲ \\ Y_۳ \end{Bmatrix} = \{۰\}$$

حال معادله ای که سویپ ($Sweep$) می کند به دست می آید.

$$\begin{cases} ۰.۱۶Y_۱ + ۰.۵۳Y_۲ + Y_۳ = ۰ \\ Y_۱ - ۰.۳۰Y_۲ + -۰.۴۱Y_۳ = ۰ \\ Y_۳ = Y_۳ \end{cases}$$

به وسیله معادله می توان ماتریس سویپینگ ($[S] = Sweeping\ Matrix$) به دست آورد.

$$\begin{cases} Y_۱ = -۳.۴۰Y_۲ - ۰.۴۱Y_۳ \\ Y_۲ = ۳.۳۳Y_۱ + ۰.۵۶Y_۳ \\ Y_۳ = Y_۳ \end{cases} \Longrightarrow [S_۲] = \begin{bmatrix} ۰ & -۳.۴۰ & -۶.۴۱ \\ ۳.۳۳ & ۰ & ۰.۵۶ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$[D_۳] = [D_۲][S_۲]$$

$$[D_۳] = \frac{ml^۳}{۶EI} \begin{bmatrix} -۵.۹۹ & ۰ & -۵.۸۲ \\ -۳.۳۳ & ۰ & -۴.۶۱ \\ ۲.۶۶ & ۰ & ۳.۱۶ \end{bmatrix}$$

حال بر اساس :

$$\omega^{۲}[D]\{Y\} = \{Y\}$$

$$\frac{ml^{۳}}{۶EI}\omega^{۲}\begin{bmatrix} -۵.۹۹ & ۰ & -۵.۸۲ \\ -۳.۳۳ & ۰ & -۴.۶۱ \\ ۲.۶۶ & ۰ & ۳.۱۶ \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Y_{۱} \\ Y_{۲} \\ Y_{۳} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_{۱} \\ Y_{۲} \\ Y_{۳} \end{Bmatrix}$$

$$(Initial\ Guess\ Vector) = \begin{Bmatrix} Y_{۱} \\ Y_{۲} \\ Y_{۳} \end{Bmatrix}$$

$$\frac{ml^{۳}}{۶EI}\omega^{۲}\begin{bmatrix} -۵.۹۹ & ۰ & -۵.۸۲ \\ -۳.۳۳ & ۰ & -۴.۶۱ \\ ۲.۶۶ & ۰ & ۳.۱۶ \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ -۱ \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} -۰.۱۷ \\ ۱.۲۸ \\ -۰.۵ \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} -۰.۱۳ \\ ۱ \\ -۰.۳۹ \end{Bmatrix} \Longrightarrow^{Continue}$$

$$\begin{Bmatrix} ۳.۰۳ \\ ۲.۲۲ \\ -۱.۵۷ \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} ۱ \\ ۰.۷۳ \\ -۰.۵۱ \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} -۳.۰۳ \\ -۰.۹۷ \\ ۱.۰۴ \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} ۱ \\ -۰.۳۲ \\ -۰.۳۴ \end{Bmatrix} \Longrightarrow^{Continue}$$

$$\begin{Bmatrix} -۴.۰۱ \\ -۱.۷۶ \\ ۱.۵۹ \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} ۱ \\ ۰.۴۳ \\ -۰.۳۹ \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} -۳.۷۲ \\ -۱.۵۳ \\ ۱.۴۲ \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} ۱ \\ ۰.۴۱ \\ -۰.۳۸ \end{Bmatrix}$$

پس تقریب مناسب است .

بنابر این فرکانس طبیعی سیستم ω و مُد ϕ بدست خواهند آمد:

$$\omega_{۳} = ۱.۶۶\sqrt{\frac{EI}{ml^{۳}}}\frac{Rad}{S} \quad , \quad \phi_{۳} = \begin{Bmatrix} ۱ \\ ۰.۴۱ \\ -۰.۳۸ \end{Bmatrix}$$

نحوه انجام مراحل فوق:

ما معادله $Y_{۱}$ را بر حسب $Y_{۲}$, $Y_{۳}$ به دست آوردیم، در ادامه باید به وسیله $[D_{۲}]$ و معادله سوپیپینگ ، $[S_{۲}]$ را حساب کنیم تا $Y_{۲}$ را برحسب $Y_{۱}$, $Y_{۳}$ بنویسیم و همین طور می توان از دو معادله سویپ بالا $Y_{۳}$ را بر حسب $Y_{۱}$, $Y_{۲}$ نوشت.

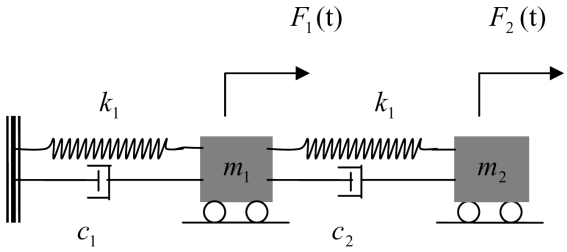
نحوه بدست آوردن:

(InertanceMatrix) , (MobilityMatrix)

(ImpedanceMatrix) , (ReceptanceMatrix)

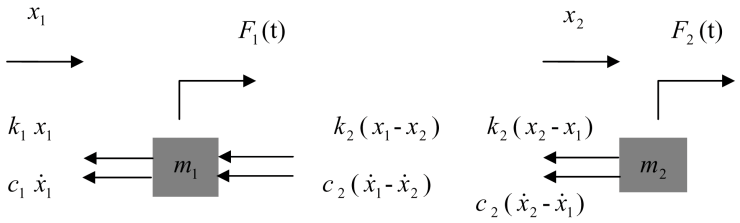
برای بدست آوردن ماتریسهای فوق یک سیستم دو درجه آزادی را در نظر می گیریم.

۶—۱—یک سیستم دو درجه آزادی جرم وفنر را در نظر بگیرید.



شکل(6-1-1)

معادله دیفرانسیل ودیاگرام آزاد $(F.B.D)$ رابرای هردوشکل می نویسیم.



شکل(6-1-2)

$$(۱)\ -k_۱x_۱ - c_۱\dot{x}_۱ - k_۲(x_۱ - x_۲) - c_۲(\dot{x}_۱ - \dot{x}_۲) + F_۱(t) = m_۱\ddot{x}_۱ \Longrightarrow$$

$$m_۱\ddot{x}_۱ + (k_۱ + k_۲)x_۱ - k_۲x_۲ + (c_۱ + c_۲)\dot{x}_۱ - c_۲\dot{x}_۲ - F_۱(t) = ۰$$

$$(۲)\ -k_۲(x_۲ - x_۱) - c_۲(\dot{x}_۲ - \dot{x}_۱) + F_۲(t) = m_۲\ddot{x}_۲ \Longrightarrow$$

$$(۲)\ m_۲\ddot{x}_۲ - k_۲x_۱ + k_۲x_۲ - c_۲\dot{x}_۱ + c_۲\dot{x}_۲ - F_۲(t) = ۰$$

حال اگر به صورت ماتریسی بنویسیم .

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_1(t) \end{Bmatrix}$$

نیروهای ما هارمونیک $(Sinusoidal)$ است . پس آنها را به صورت تابع نمایی در نظر می گیریم :

$$F_1(t) = F_1 e^{i\omega t} \quad , \quad F_2(t) = F_2 e^{i\omega t}$$

جوابهای x_1 و x_2 نیز هارمونیک $(Sinusoidal)$ هستند.

$$x_1 = X_1 e^{i(\omega t - \phi)} = \underbrace{X_1 e^{-i\phi}}_{\bar{X}_1} . e^{i\omega t} = \bar{X}_1 e^{i\omega t}$$

$$x_2 = X_2 e^{i(\omega t - \phi)} = \underbrace{X_2 e^{-i\phi}}_{\bar{X}_2} . e^{i\omega t} = \bar{X}_2 e^{i\omega t}$$

حال اگر قرار دهیم :

$$e^{i\omega t}(-\omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{x}_2 \end{Bmatrix} + i\omega \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{Bmatrix}) = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$$

اگر به معادله تبدیل کنیم و سپس به صورت ماتریس بنویسیم .

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + i\omega(c_1 + c_2) + K_1 + K_2 & -c_2 i\omega - k_2 \\ -c_2 i\omega - k_2 & -m_2\omega^2 + c_2 i\omega + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

که به آن ماتریس سختی دینامیکی $(Dynamic\ Stiffener\ Matrix)$ می گوییم .
حال با استفاده از دستور کرامر :

$$a_{11}\bar{X}_1 + a_{12}\bar{X}_2 = F_1$$

$$a_{21}\bar{X}_1 + a_{22}\bar{X}_2 = F_2 \Longrightarrow \bar{X}_2 = \frac{F_2 - a_{21}\bar{X}_1}{a_{22}}$$

$$a_{11}\bar{X}_1 + \frac{a_{12}}{a_{22}}(F_2 - a_{21}\bar{X}_1) = F_1$$

$$\bar{X}_1(a_{11} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}}) = F_1 - \frac{a_{12}}{a_{22}}F_2$$

$$\bar{X}_1 \underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}_{D} = F_1 a_{22} - a_{12}F_2 \Longrightarrow \bar{X}_1 = \frac{a_{22}F_1 - a_{12}F_2}{D}$$

به همین صورت برای $\bar{X}_2$ داریم :

$$\bar{X}_2 = \frac{a_{11}F_2 - a_{21}F_1}{D}$$

از طرفی :

$$\bar{X}_1 = \frac{\bar{k}_{22}F_1 - \bar{k}_{12}F_2}{D} \quad , \quad \bar{X}_2 = \frac{\bar{k}_{11}F_2 - \bar{k}_{21}F_1}{D}$$

حال اگر به صورت ماتریس بنویسیم .

$$\begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{k}_{22}}{D} & -\frac{\bar{k}_{12}}{D} \\ -\frac{\bar{k}_{21}}{D} & \frac{\bar{k}_{11}}{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

ماتریس $[\alpha]$ معکوس $(Inverse)$ ماتریس $[\bar{k}]$ است.

$$Receptance\ Matrix \ = \ [\alpha] = [\bar{k}]^{-1}$$

در این صورت داریم :

$$\begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

حال اگر ماتریس قبل را بر این اساس بنویسیم .

$$\dot{x}_1 = \underbrace{\bar{X}_1 i\omega}_{V_1} e^{i\omega t} = V_1 e^{i\omega t}$$

$$\dot{x}_2 = \underbrace{\bar{X}_2 i\omega}_{V_2} e^{i\omega t} = V_2 e^{i\omega t}$$

بنابر این :

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{Bmatrix} = i\omega \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{m}_{11} & \bar{m}_{12} \\ \bar{m}_{21} & \bar{m}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

در این صورت اگر $(Receptance\ Matrix)$ را در $i\omega$ ضرب کنیم $= (Mobility\ Matrix)$

.

$$Mobility\ Matrix\ =\ [\bar{m}] = i\omega[\alpha] = i\omega[\bar{k}]^{-1}$$

حال اگر شتاب را بدست آوریم . یعنی یک بار دیگر مشتق گیری کنیم :

$$\ddot{x}_1 = a_1 = -\omega^2 \bar{X}_1 e^{i\omega t} = i\omega V_1 e^{i\omega t} = A_1 e^{i\omega t}$$

$$\ddot{x}_2 = a_2 = -\omega^2 \bar{X}_2 e^{i\omega t} = i\omega V_2 e^{i\omega t} = A_2 e^{i\omega t}$$

بنابر این :

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = -\omega^2 \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_{11} & \bar{I}_{12} \\ \bar{I}_{21} & \bar{I}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{I}_{11} & \bar{I}_{12} \\ \bar{I}_{21} & \bar{I}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

در این صورت اگر $(Mobility\ Matrix)$ را در $i\omega$ ضرب کنیم $= (Inertance\ Matrix)$

$$Inertance\ Matrix\ =\ i\omega[\bar{m}] = -\omega^2[\alpha] = -\omega^2[\bar{k}]^{-1}$$

حال برای بدست آوردن $(Impedance\ Matrix)$:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{m}_{11} & \bar{m}_{12} \\ \bar{m}_{21} & \bar{m}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{Bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{Bmatrix}$$

در این صورت :

$$Impedance\ Matrix\ =\ [z] = [\bar{m}]^{-۱} = i\omega[I]_{-۱} = \frac{۱}{i\omega}[\alpha]^{-۱} = \frac{۱}{i\omega}[\bar{k}]$$

۷—۱— مقادیر $(Impedance)$ در یک آزمایش ارتعاشات سازه ای به صورت زیر بدست آمده اند.

$$(\frac{F_۱}{V_۱})_{F_۲=۰} = -۱۷۱\ j\frac{N}{m}sec \quad , \quad (\frac{F_۱}{V_۱})_{V_۲=۰} = ٦٦.۷\ j\frac{N}{m}sec$$

$$(\frac{V_۲}{V_۱})_{F_۲=۰} = -۰.۷۱۴$$

که :

$$\begin{Bmatrix} F_۱ \\ V_۱ \end{Bmatrix} = [\,T\,] \begin{Bmatrix} F_۲ \\ V_۲ \end{Bmatrix}$$

مطلوب است تعیین ماتریس انتقال $[T] =?$:

با توجه به رابطه ماتریسی بالا :

$$\begin{Bmatrix} F_۱ \\ V_۱ \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{۱۱} & T_{۱۲} \\ T_{۲۱} & T_{۲۲} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_۲ \\ V_۲ \end{Bmatrix} \Longrightarrow$$

$$(۱)\ \begin{cases} F_۱ = T_{۱۱}F_۲ + T_{۱۲}V_۲ \\ V_۱ = T_{۲۱}F_۲ + T_{۲۲}V_۲ \end{cases} \Longrightarrow F_۲ = ۰ \begin{matrix} \nearrow F_۱ = T_{۱۲}V_۲ \\ \searrow V_۱ = T_{۲۲}V_۲ \end{matrix} \Longrightarrow$$

$$\frac{F_۱}{V_۱} = \frac{T_{۱۲}}{T_{۲۲}} = -۱۷۱j\frac{N}{m}sec$$

از طرف دیگر با توجه به رابطه (۱) داریم :

$$\frac{V_۱}{V_۲} = \frac{۱}{T_{۲۲}} = -۰.۷۱۴$$

بنابر این $T_{۱۲}\ ,\ T_{۲۲}$ بدست خواهند آمد.

$$T_{۱۲} = ۲۳۹.۵j \quad , \quad T_{۲۲} = -۱.۴$$

که اندیس j نشان دهنده عدد مختلط بودن آن است .
در حالت بعد معادله (۱) را برای $V_۲ = ۰$ می نویسیم .

$$(۱) \quad \begin{cases} F_۱ = T_{۱۱}F_۲ + T_{۱۲}V_۲ \\ V_۱ = T_{۲۱}F_۲ + T_{۲۲}V_۲ \end{cases} \Longrightarrow V_۲ = ۰ \begin{cases} \nearrow V_۱ = T_{۲۱}F_۲ \\ \searrow F_۱ = T_{۱۱}F_۲ \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\frac{F_۱}{V_۱} = \frac{T_{۱۱}}{T_{۲۱}} = ٦٦.۷j\frac{N}{m}sec$$

برای بدست آوردن $T_{۲۱}$, $T_{۱۱}$ می دانیم که ماتریس $[T]$ اُرتوگونالیتی $(Orthogonality)$ است .بنابر این دترمینان آن مساوی ± ۱ خواهد شد.
پس :

$$T_{۱۱}T_{۲۲} - T_{۲۱}T_{۱۲} = ۱ \qquad By\ Orthogonality$$

بنابر این جوابهای $T_{۲۱}$, $T_{۱۱}$ نیز بدست می آیند.

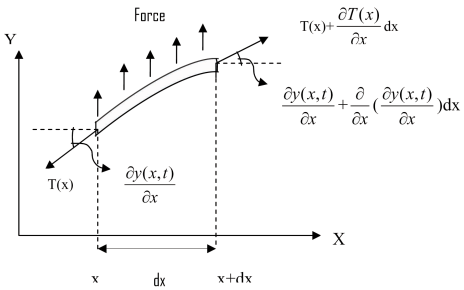
$$T_{۲۱} = -۳ \times ۱۰^{-۳}j \quad , \quad T_{۱۱} = ۰.۲$$

حال به وسیله ماتریس $Impedance\ Matrix = [z] = [T]$ می توانیم ماتریسهای $[\alpha]$, $[\bar{m}]$, $[\bar{I}]$ را بدست آوریم .

۲- سیستم‌های پیوسته:

۱ — ۲ — یک نخ ارتعاشی را در نظر می گیریم. مثال: سیم گیتار، رشته سیم کابل برق.

معادله دیفرانسیل حرکت را برای یک نخ ارتعاشی بر اساس قانون دوم نیوتون ($SecondLawNewton$) بدست می آوریم:



شکل(1-2-1)

برای هر سیستم پیوسته در ابتدا باید یک المان آن را در نظر بگیریم و نیروها را بر روی آن بررسی کنیم.

ρ تابعی از x است. پس می‌توان گفت:

جرم بر واحد طول تار $= \rho(x)$

مثلا: $\rho(x) = a + b^{۲}$

حال باید کشش را مشخص کنیم.

مسئله از نظر فضایی یک بعدی است.

قانون دوم نیوتون ($SecondLawNewton$) در جهت y:

باید $-T$ در $\sin\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$ ضرب شود ولی به علت کوچک بودن زاویه داریم:

$$-T\sin\frac{\partial y}{\partial x} + (T + \frac{\partial T}{\partial x}dx)\sin\left[\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^{۲} y}{\partial x^{۲}}dx\right] = \rho\frac{\partial^{۲} y}{\partial t^{۲}}dx \Longrightarrow$$

$$-T\frac{\partial y}{\partial x} + (T + \frac{\partial T}{\partial x}dx)\left[\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^{۲} y}{\partial x^{۲}}dx\right] = \rho\frac{\partial^{۲} y}{\partial t^{۲}}dx$$

پس معادله را به صورت کلی می نویسیم.

اگر نیروی خارجی بر واحد طول را به صورت $F(x,t)$ نمایش دهیم و آن را نیز به معادله اضافه کنیم:

$$-T\frac{\partial y}{\partial x} + (T + \frac{\partial T}{\partial x}dx)\left[\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^{۲} y}{\partial x^{۲}}dx\right] + F(x,t)dx = \rho\frac{\partial^{۲} y}{\partial t^{۲}}dx$$

از جملات کوچکتر صرف نظر می کنیم .

$$-T\frac{\partial y}{\partial x}+T\frac{\partial y}{\partial x}+T\frac{\partial^{۲} y}{\partial x^{۲}}dx+\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}dx+\frac{\partial T}{\partial x}(\frac{\partial^{۲} y}{\partial x^{۲}})(dx)^{۲}+F(x,t)dx=$$

$$\rho\frac{\partial^{۲} y}{\partial t^{۲}}dx$$

با ساده کردن داریم :

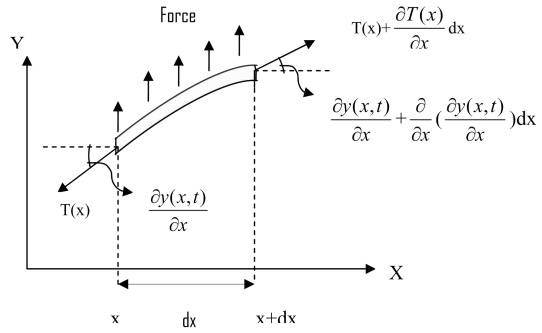
$$T\frac{\partial^{۲} y}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}+\underbrace{\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial^{۲} y}{\partial x^{۲}}dx}_{dx\simeq ۰}+F(x,t)=\rho\frac{\partial^{۲} y}{\partial t^{۲}}\Longrightarrow$$

$$T\frac{\partial^{۲} y}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}+F(x,t)=\rho\frac{\partial^{۲} y}{\partial t^{۲}}$$

بنابراین معادله دیفرانسیل حرکت براساس قانون دوم نیوتون $(Second\ Law\ Newton)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(T\frac{\partial y}{\partial x})+F(x,t)=\rho\frac{\partial^{۲} y}{\partial t^{۲}}$$

۲—۲— در مورد مسئله قبل معادله دیفرانسیل حرکت را برای یک نخ ارتعاشی بر اساس قانون دوم نیوتون $(Second\ Law\ Newton)$ بدست آوردیم .
حال می خواهیم معادله دیفرانسیل حرکت را بر اساس اصل همیلتون $(Hamilton\ Principal\ or\ Variational\ Principal)$ بدست آوریم :



شکل(2-2-1)

راه حل اول : معادله دیفرانسیل حرکت بر اساس قانون دوم نیوتون $(Second\ Law\ Newton)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[T(x)\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right]+f(x,t)=\rho(x)\frac{\partial^{۲}y(x,t)}{\partial t^{۲}}$$

راه حل دوم : معادله دیفرانسیل حرکت بر اساس اصل همیلتون $(Hamilton\ Principal\ or\ Variational\ Principal)$:

$$\delta\int_{t_۱}^{t_۲}(T-U+W)dt=۰ \qquad Where:$$

T : انرژی جنبشی

U : انرژی پتانسیل

W : کار انجام شده

انرژی جنبشی (T) :

$$T=\frac{۱}{۲}mV^{۲}\Longrightarrow dT=\frac{۱}{۲}V^{۲}dm\Longrightarrow dT=\frac{۱}{۲}(\frac{\partial y}{\partial t})^{۲}dm$$

$\rho(x)$ جرم بر واحد طول است و داریم $\rho=\frac{m}{l}$ در این صورت برای المنت dx :

$$\rho=\frac{dm}{dx}\Longrightarrow dm=\rho dx$$

$$dT=\frac{۱}{۲}(\frac{\partial y}{\partial t})^{۲}\rho dx\Longrightarrow$$

بنابر این انرژی جنبشی (T) :

$$T=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{l}\rho(\frac{\partial y}{\partial t})^{۲}dx$$

انرژی پتانسیل (U) :

$$U=\frac{۱}{۲}ky^{۲}\Longrightarrow^{F=ky}\quad U=\frac{۱}{۲}Fy=\frac{۱}{۲}Ty\frac{\partial y}{\partial x}\Longrightarrow\ dU=\frac{۱}{۲}T\frac{\partial y}{\partial x}dy\Longrightarrow^{dy=\frac{\partial y}{\partial x}dx}$$

$$dU=\frac{۱}{۲}T(\frac{\partial y}{\partial x})^{۲}dx$$

بنابر این انرژی پتانسیل (U) :

$$U=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{l}T(\frac{\partial y}{\partial x})^{۲}dx$$

کار انجام شده توسط نیروهای خارجی (W) :

نیروی $f(x,t)$ در المان dx بر روی محور y : $dW = Fydx$

اگر نیروی خارجی داشته باشیم :

$$W = \int_{\circ}^{l} yFdx$$

حال اگر در فرمول کلی قرار دهیم :

$$\delta \int_{t_{۱}}^{t_{۲}} (T - U + W)dt = \circ \Longrightarrow$$

$$\delta \int_{t_{۱}}^{t_{۲}} \left[\frac{۱}{۲} \int_{\circ}^{l} \rho (\frac{\partial y}{\partial t})^{۲} dx - \frac{۱}{۲} \int_{\circ}^{l} T (\frac{\partial y}{\partial x})^{۲} dx + \int_{\circ}^{l} yFdx \right] dt = \circ$$

اگر انتگرال بالا را به ۳ قسمت تقسیم کنیم :

$$I_{۱} = \delta \int_{t_{۱}}^{t_{۲}} \left[\int_{\circ}^{l} \frac{۱}{۲} \rho (\frac{\partial y}{\partial t})^{۲} dx \right] dt$$

$$I_{۱} = \int_{t_{۱}}^{t_{۲}} \int_{\circ}^{l} \frac{۱}{۲} \rho \delta (\frac{\partial y}{\partial t})^{۲} dxdt = \int_{t_{۱}}^{t_{۲}} \int_{\circ}^{l} \frac{\partial y}{\partial t} \rho \delta (\frac{\partial y}{\partial t}) dxdt \Longrightarrow$$

$$I_{۱} = \int_{t_{۱}}^{t_{۲}} \int_{\circ}^{l} \rho \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial (\delta y)}{\partial t} dxdt = \int_{\circ}^{l} \rho dx \int_{t_{۱}}^{t_{۲}} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial (\delta y)}{\partial t} dt$$

حل انتگرال به روش جزء به جزء $(Part\ to\ Part)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = u \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial y}{\partial t})dt = du \\ \frac{\partial (\delta y)}{\partial t} dt = dv \Longrightarrow \delta y = v \end{cases}$$

$$\int_{t_{۱}}^{t_{۲}} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial (\delta y)}{\partial t} dt = \underbrace{\frac{\partial y}{\partial t} \delta y \mid_{t_{۱}}^{t_{۲}}}_{=\circ} - \int_{t_{۱}}^{t_{۲}} \delta y \frac{\partial^{۲} y}{\partial t^{۲}} dt$$

بنابر این $(I_{۱})$:

$$I_{۱} = - \int_{\circ}^{l} \int_{t_{۱}}^{t_{۲}} \rho \delta y \frac{\partial^{۲} y}{\partial t^{۲}} dxdt$$

$$I_۲ = \delta \int_{t_۱}^{t_۲} \left[\frac{۱}{۲} \int_{\circ}^{l} T(\frac{\partial y}{\partial x})^۲ dx \right] dt = \int_{t_۱}^{t_۲} \int_{\circ}^{l} \frac{۱}{۲} T\delta(\frac{\partial y}{\partial x})^۲ dxdt \Longrightarrow$$

$$I_۲ = \int_{t_۱}^{t_۲} \int_{\circ}^{l} T\frac{\partial y}{\partial x}\delta(\frac{\partial y}{\partial x})dxdt = \int_{t_۱}^{t_۲} dt \int_{\circ}^{l} T\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial(\delta y)}{\partial x}dx$$

حل انتگرال به روش جزء به جزء $(Part\ to\ Part)$:

$$\begin{cases} T\frac{\partial y}{\partial x} = u \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}(T\frac{\partial y}{\partial x})dx = du \\ \frac{\partial(\delta y)}{\partial x}dx = dv \Longrightarrow \delta y = v \end{cases}$$

$$\int_{\circ}^{l} T\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial(\delta y)}{\partial x}dx = \underbrace{T\frac{\partial y}{\partial x}\delta y \mid_{x=\circ}^{x=l}}_{=\circ} - \int_{\circ}^{l} \delta y\frac{\partial}{\partial x}(T\frac{\partial y}{\partial x})dx$$

بنابر این $(I_۲)$:

$$I_۲ = -\int_{\circ}^{l} \int_{t_۱}^{t_۲} \delta y\frac{\partial}{\partial x}(T\frac{\partial y}{\partial x})dxdt$$

حال $(I_۳)$ را بدست می آوریم :

$$I_۳ = \delta \int_{t_۱}^{t_۲} \left[\int_{\circ}^{l} yFdx \right] dt = \int_{t_۱}^{t_۲} \int_{\circ}^{l} F\delta ydxdt$$

در این صورت خواهیم داشت :

$$I_۱ - I_۲ + I_۳ = \circ \Longrightarrow -I_۱ + I_۲ - I_۳ = \circ$$

در نتیجه :

$$\int_{\circ}^{l} \int_{t_۱}^{t_۲} \rho\delta y\frac{\partial^۲ y}{\partial t^۲}dxdt - \int_{\circ}^{l} \int_{t_۱}^{t_۲} \delta y\frac{\partial}{\partial x}(T\frac{\partial y}{\partial x})dxdt - \int_{t_۱}^{t_۲} \int_{\circ}^{l} F\delta ydxdt = \circ$$

$$\int_{t_۱}^{t_۲} \delta y \left[\int_{\circ}^{l} (\ \rho(x)\frac{\partial^۲ y(x,t)}{\partial t^۲} - \frac{\partial}{\partial x}(T\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}) - F(x,t)\ )\ dx \right] dt = \circ$$

بنابر این بر اساس اصل همیلتون $(Hamilton)$ ، بر اساس بحث مجازی عمل می کنیم .
پس اگر این معادله را حل کنیم (درون انتگرال را مساوی صفر قرار دهیم .) به معادله

دیفرانسیل قانون دوم نیوتون $(Second\ Law\ Newton)$ خواهیم رسید.

بر اساس ارتعاشات آزاد $(Free\ Vibration)$ باید نیروی خارجی را صفر کنیم :

$$F(x,t) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[T(x)\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right] = \rho(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \qquad (P.D.E)$$

همیشه در سیستم های پیوسته به معادلات با مشتقات جزئی $(P.D.E) = Partial\ Differential\ Equation$ می رسیم. پس برای حل معادله $(P.D.E)$ به روش تحلیلی عمل می کنیم و اگر حل نشد به روش نیمه تحلیلی .

$$y(x,t) = X(x)g(t)$$

$$g\frac{d}{dx}[T(x)X'] = \rho(x)X\ddot{g} \Longrightarrow \frac{\ddot{g}}{g} = \frac{T'(x)X' + X''T(x)}{X\rho(x)} = -\omega^2$$

از لحاظ زمانی تلقی $(Time\ Scrabble)$ می شود. ولی اگر از نظر فاصله تلقی $(Space\ Scrabble)$ شود در این صورت به یک معادله $(O.D.E) = Ordinary\ Differential\ Equation$ تبدیل می شود .
بنابر این :

$$\frac{\ddot{g}}{g} = \frac{T'(x)X' + X''T(x)}{X\rho(x)} = -\omega^2 \begin{cases} \ddot{g} = -\omega^2 g \quad , \quad g(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t \\ T'(x)X' + X''T(x) = -\omega^2 X\rho(x) \end{cases}$$

فرض کنیم $(Assume)$:

$$T(x) = T = constant \quad , \quad \rho(x) = \rho = constant$$

در این صورت از رابطه دوم :

$$TX'' = -\omega^2\rho X \Longrightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{\rho\omega^2}{T} = -\beta^2 \qquad Where\ : \beta^2 = \frac{\rho\omega^2}{T} \Longrightarrow$$

$$X(x) = C_1\sin\beta x + C_2\cos\beta x$$

پس جواب معادله دیفرانسیل ما به صورت :

$$y(x,t) = (C_1 \sin\beta x + C_2 \cos\beta x)(A\sin\omega t + B\cos\omega t)$$

$$t = 0 \Longrightarrow \begin{cases} y(x,0) = y_0 \\ y'(x,0) = v_0 \end{cases}$$

برای حالت :

۱) دو سر گیر دار :

$$\begin{cases} y(x,t)\mid_{x=0} = y(0,t) = 0 \\ y(x,t)\mid_{x=l} = y(l,t) = 0 \end{cases}$$

دو شرط مرزی نیاز داریم تا بتوانیم جواب را بدست آوریم.

از طریق دو سر آزاد شرایط مرزی را بدست می آوریم :

دو سر آزاد :

$$\begin{cases} T\frac{\partial y}{\partial x}\mid_{x=0} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial y}{\partial x}\mid_{x=0} = 0 \\ T\frac{\partial y}{\partial x}\mid_{x=l} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial y}{\partial x}\mid_{x=l} = 0 \end{cases}$$

اگر ساده تر کنیم :

$$\begin{cases} gX'\mid_{x=0} = 0 \Longrightarrow X'\mid_{x=0} = 0 \Longrightarrow X\mid_{x=0} = 0 \\ gX'\mid_{x=l} = 0 \Longrightarrow X'\mid_{x=l} = 0 \Longrightarrow X\mid_{x=l} = 0 \end{cases}$$

با توجه به شرایط مرزی بدست آمده برای دو سر گیر دار داریم :

$$X(x) = C_1 \sin\beta x + C_2 \cos\beta x \qquad X\mid_{x=0} = 0\ ,\ X\mid_{x=l} = 0$$

$$X\mid_{x=0} = 0 \Longrightarrow C_2 = 0 \Longrightarrow X(x) = C_1 \sin\beta x$$

$$X\mid_{x=l} = 0 \Longrightarrow C_1 \sin\beta l + C_2 \cos\beta l = 0 \Longrightarrow^{C_2=0}$$

$$C_1 \sin\beta l = 0 \Longrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ \sin\beta l = 0 \end{cases}$$

ارتعاش نداریم : $But\ :\ Ans\ :\ C_{۲}=۰\ \ ,\ C_{۱}=۰ \Longrightarrow X(x)=۰$

ارتعاش داریم : $But\ :\ Ans\ :\ C_{۲}=۰\ \ ,\ \ \sin\beta l=۰ \Longrightarrow X(x)=۰$

$$\sin\beta l=۰ \Longrightarrow \sin n\pi$$

$$\sin\beta l=\sin n\pi \Longrightarrow \beta l=n\pi \Longrightarrow \beta_n=\frac{n\pi}{l} \qquad (n=۱,۲,۳,...)$$

$$But\ :\ \beta^{۲}=\frac{\rho\omega^{۲}}{T} \Longrightarrow \omega_n^{۲}=\frac{T}{\rho}\beta_n^{۲}=\frac{T}{\rho}\frac{n^{۲}\pi^{۲}}{l^{۲}} \Longrightarrow$$

بنابر این فرکانس طبیعی ω_n :

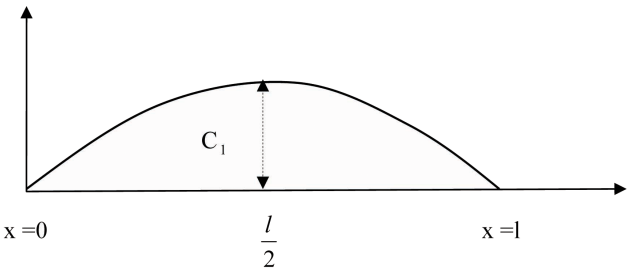
$$\omega_n=\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}} \qquad\qquad (n=۱,۲,۳,...)$$

حال مُد ها طبیعی X_nارتعاش :

$$X(x)=C_{۱}\sin\beta x \Longrightarrow X_n(x)=C_n\sin\beta_n x=C_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

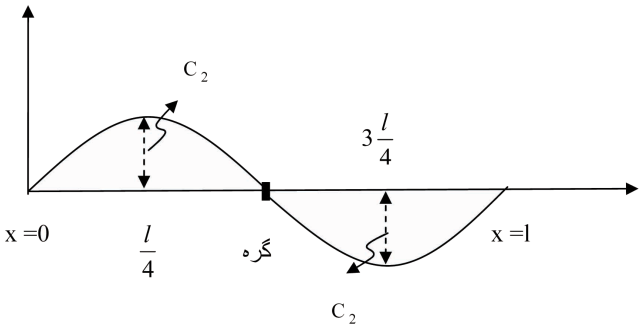
شکل مُد ها طبیعی X_n ارتعاش :

$$X_{۱}(x)=C_{۱}\sin\tfrac{\pi}{l}x$$
$$\omega_{۱}=\tfrac{\pi}{l}\sqrt{\tfrac{T}{\rho}}$$



شکل(2-2-2)

$$X_{۲}(x)=C_{۲}\sin\tfrac{۲\pi}{l}x$$
$$\omega_{۲}=\tfrac{۲\pi}{l}\sqrt{\tfrac{T}{\rho}}$$



شکل(3-2-2)

درحالت بعدی دوگره پیدا می‌شود و به همین صورت ارتعاشات ادامه می‌یابد.
فرمول برای گره‌ها:

$$If \ : \ n = ۱ \qquad\qquad m = ۰$$

$$If \ : \ n = ۲ \qquad\qquad m = ۱$$

$$If \ : \ n = ۳ \qquad\qquad m = ۲$$

دراین صورت تعداد گره (m) :

$$m = n - ۱$$

خاصیت اُرتوگونالیتی ($Orthogonality and Normalization$):

تعریف :
اگر $f(x)$ و $g(x)$ و تابع تعریف شده در بازه $[a,b]$ و $W(x)$ تابع وزنی در بازه $[a,b]$ باشد در این صورت :
حاصل ضرب خارجی f و g نسبت به تابع وزن $W(x)$:

$$(f,g) = \int_a^b f(x).g(x)W(x)dx$$

که نُرْم $f(x)$ می‌شود:

$$|| f || = (f,f)^{\frac{۱}{۲}} = \left[\int_a^b f^{۲}(x)W(x)dx\right]^{\frac{۱}{۲}}$$

دراین صورت اگر داشته باشیم:

$$(f_n, f_m) = \int_a^b f(x).g(x)W(x)dx = \delta_{mn} = \begin{cases} \delta_{mn} = ۰ & n \neq m \\ \delta_{mn} = ۱ & m = n \end{cases}$$

بنابراین اگر $\delta_{mn} = ۰$ شود و تابع f_n, f_m بر هم عمود $(Orthogonal)$ واگر $\delta_{mn} = ۱$ $f_n(x)$ نرمالایزشده بدست خواهد آمد.

نرمالایزکردن مُدهاوخاصیت اُرتوگونالیتی ($OrthogonalityandNormalization$):

دراین‌قسمت‌تابع‌وزنی‌ما $\rho(x)$ می‌باشد.

$$\int_{\circ}^{l} X_n(x)X_m(x)\rho(x)dx = ۱ \qquad If \ : \ m = n$$

$$\int_{\circ}^{l} X_n^{۲}(x)\rho(x)dx = \rho C_n^{۲}\int_{\circ}^{l}\sin^{۲}\beta_n x dx = \rho C_n^{۲}\int_{\circ}^{l}\frac{۱-\cos ۲\beta_n x}{۲}dx =$$

$$\frac{\rho C_n^{۲}}{۲}\int_{\circ}^{l}(۱-\cos ۲\beta_n x)dx = \frac{\rho C_n^{۲}}{۲}\left[l - \frac{\sin ۲\beta_n l}{۲\beta_n}\right] = ۱ \Longrightarrow$$

$$\rho C_n^{۲}\frac{l}{۲} = ۱ \Longrightarrow C_n = \sqrt{\frac{۲}{\rho l}}$$

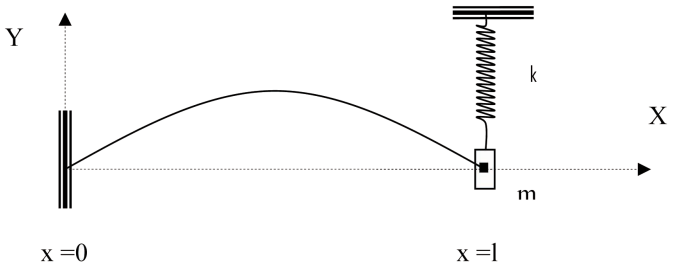
دراین‌صورت:

$$X_n^{(N)}(x) = C_n \sin\beta_n x = \sqrt{\frac{۲}{\rho l}}\sin\beta_n x, \omega \qquad {}_n = \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

---

۳ — ۲ — برای ارتعاشات تار مرتعش به طول l و جرم بر واحد طول ρ که تحت تاثیر کشش ثابت T قرار دارد و در $x = ۰$ گیر دارد و در $x = l$ شامل سیستم جرم و فنر مطابق شکل می باشد.

معادله‌دیفرانسیل‌حرکت‌رابدست‌آورده‌ومعادله‌فرکانس‌راتشکیل‌دهید:



شکل(3-2-1)

$(BoundaryCondition)$ =وقتی‌ضرایب‌رابدست‌می‌آوریم‌خودراظاهرمی‌کند.

(درتعیین‌ضرایب‌بکارمی‌رودوتاثیربرمعادله‌ای‌می‌گذاردکه‌فرکانسهاراازآن‌بدست می‌آوریم.)

سیستم پیوسته و قسمتی از آن شامل تار (سرگیردار) وقسمت دیگر آن شامل جرم و فنر (سرآزاد) می‌باشد.

بنابراین معادله دیفرانسیل تار ارتعاشی:

$$\frac{\partial}{\partial x}(T(x)\frac{\partial y}{\partial x}) = \rho(x)\frac{\partial^{۲} y}{\partial t^{۲}}$$

$$If \quad : \; T(x) = T = Constant, \rho \quad (x) = \rho = Constant$$

$$T\frac{\partial y^{۲}}{\partial x^{۲}} = \rho\frac{\partial^{۲} y}{\partial t^{۲}}$$

$$y(x,t) = f(x)g(t)$$

$$\frac{\ddot{g}}{g} = \frac{Tf''(x)}{\rho f(x)} = -\omega^{۲} \begin{cases} \ddot{g} = -\omega^{۲} g, g \quad (t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t \\ f''(x)T = -\omega^{۲} f(x)\rho \end{cases}$$

$$-\beta^{۲} = -\frac{\omega^{۲}\rho}{T} \Longrightarrow f(x) = C_{۱}\sin\beta x + C_{۲}\sin\beta x$$

باتوجه به شرط مرزی اول برای سرگیردار:

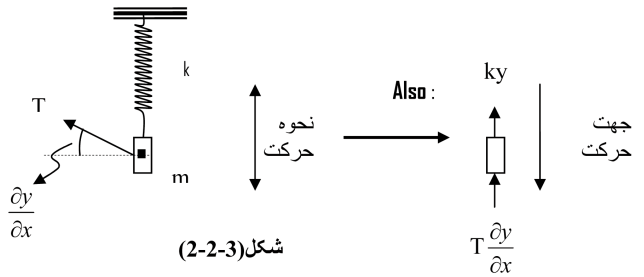
$$y(x,t)\mid_{x=۰} = y(۰,t) = f(x)\mid_{x=۰} = ۰ \Longrightarrow$$

$$f(x)\mid_{x=۰} \Longrightarrow C_{۱}\sin\beta(۰) + C_{۲}\cos\beta(۰) = ۰ \Longrightarrow C_{۲} = ۰ \Longrightarrow$$

$$f(x) = C_{۱}\sin\beta x$$

برای بدست آوردن شرط مرزی دوم نیاز به معادله دیفرانسیل جرم وفنر داریم.

دیاگرام آزاد $(F.B.D)$ باایجاد برش به صورت زیر خواهد شد:



شکل(2-2-3)

باتوجه به قانون دوم نیوتون $(SecondLawNewton)$:

$$-T\frac{\partial y}{\partial x} - ky = m\frac{\partial^{۲} y}{\partial t^{۲}}$$

اگر $y(x,t)$ را در آن قرار دهیم :

$$y(x,t) = f(x)g(t)$$

$$g(t)\left[(-Tf'(x)) - K(f(x))\right] = \left[mf(x)\right]\ddot{g}(t) \Longrightarrow \frac{\ddot{g}(t)}{g(t)} = -\omega^{۲}$$

و برای $f(x)$ به ازاء $x = l$ که شرط دوم است داریم :

$$-Tf'(x)\mid_{x=l} -kf(x)\mid_{x=l} = -m\omega^{۲} f(x)\mid_{x=l}$$

بنابر این اگر جا گذاری کنیم :
بر اساس شرط مرزی اول $C_{۲} = ۰$:

$$f(x) = C_{۱}\sin\beta x$$

$$-TC_{۱}\beta\cos\beta x\mid_{x=l} -kC_{۱}\sin\beta x\mid_{x=l} = -m\omega^{۲}C_{۱}\sin\beta x\mid_{x=l} \Longrightarrow$$

$$-T\beta\cos\beta l - k\sin\beta l = -m\omega^{۲}\sin\beta l$$

اگر معادله را در l ضرب کنیم :

$$-Tl\beta\cos\beta l - kl\sin\beta l = -m\omega^{۲} l\sin\beta l \qquad If\ :\ \beta l = \beta^{\star}$$

$$-T\beta^{\star}\cos\beta^{\star} - kl\sin\beta^{\star} = -m\omega^{۲} l\sin\beta^{\star} \Longrightarrow -T\beta^{\star}\cos\beta^{\star} = l(k - m\omega^{۲})\sin\beta^{\star}$$

بنابر این :

$$\tan\beta^{\star} = -\frac{T\beta^{\star}}{l(k - m\omega^{۲})}$$

از این معادله که باید عددی $(Numerical)$ حل شود می توان $\beta^{\star}$ را بدست آورد.
اگر $\beta^{۲} = \frac{\rho}{T}\omega^{۲}$ قرار دهیم $\beta^{\star}$ بدست می آید.

نرمالایز کردن مُد هاوخاصیت اُرتوگونالیتی $(Orthogonality\ and\ Normalization)$:

$$f(x) = C_n \sin \beta_n x \qquad\qquad y_n(x,t) = \underbrace{C_n \sin \beta_n x}_{f(x)}\ g(x)$$

اگر دو مُد ارتعاشی را در نظر بگیریم . مثلا : مُد اول و دهم .
ما مُد m و n را در نظر می گیریم :

مُد (n) : $y_n(x,t) = C_n \sin \beta_n x\ g(t)$

مُد (m) : $y_m(x,t) = C_m \sin \beta_m x\ g(t)$

جرم بر واحد طول $= \rho$

اگر چنین انتگرالی را تشکیل دهیم :

$$\int_{\circ}^{l} y_n(x,t) y_m(x,t) \rho(x) dx = \circ \qquad\qquad If\ :\ m \neq n\ (Orthogonality)$$

$$\rho g(t) C_n C_m \int_{\circ}^{l} \sin \beta_n x \sin \beta_m x dx = \circ \Longrightarrow \rho C_n C_m \int_{\circ}^{l} \sin \beta_n x \sin \beta_m x dx = \circ$$

حال مُد های طبیعی را نرمالایز $(Normalaize)$ می کنیم :

$$\int_{\circ}^{l} \rho y_n(x,t) y_m(x,t) dx = \delta_{mn} \qquad\qquad If\ :\ m = n\ (Normalaize)$$

$$\int_{\circ}^{l} \rho y_n^{۲}(x,t) dx = ۱ \Longrightarrow \rho g^{۲}(t) C_n^{۲} \int_{\circ}^{l} \sin^{۲} \beta_n x dx = ۱$$

بنابر این :

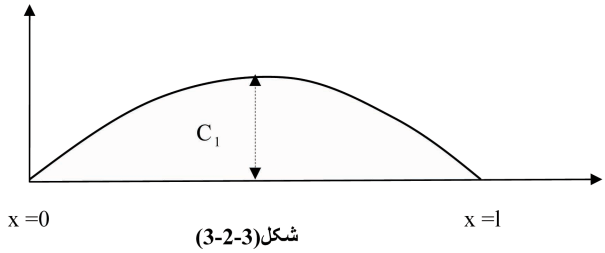
$$\rho C_n^{۲} \int_{\circ}^{l} \sin^{۲} \beta_n x dx = ۱ \Longrightarrow \rho C_n^{۲} \frac{l}{۲} = ۱ \Longrightarrow C_n^{۲} = \frac{۲}{\rho l} \Longrightarrow$$

$$C_n = \sqrt{\frac{۲}{\rho l}}$$

از طرفی : $\beta l = n\pi \Longrightarrow \beta = \frac{n\pi}{l}$

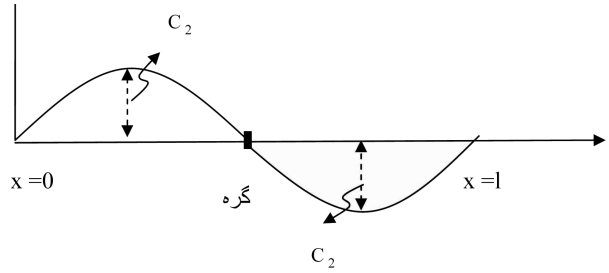
$$f_n(x) = C_n \sin \beta_n x$$

شکل مُد ها طبیعی ارتعاش :



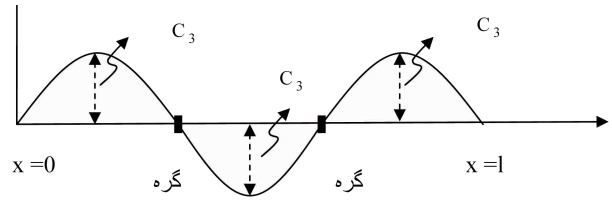
$$f_۱(x) = c_۱ \sin \frac{\pi}{l} x$$
$$\omega_۱ = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

شکل(3-2-3)



$$f_۲(x) = c_۲ \sin \frac{۲\pi}{l} x$$
$$\omega_۲ = \frac{۲\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

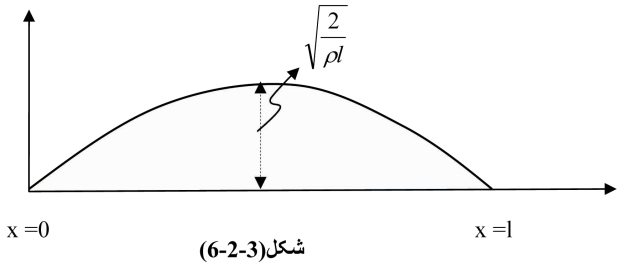
شکل(4-2-3)



$$f_۳(x) = c_۳ \sin \frac{۳\pi}{l} x$$
$$\omega_۳ = \frac{۳\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

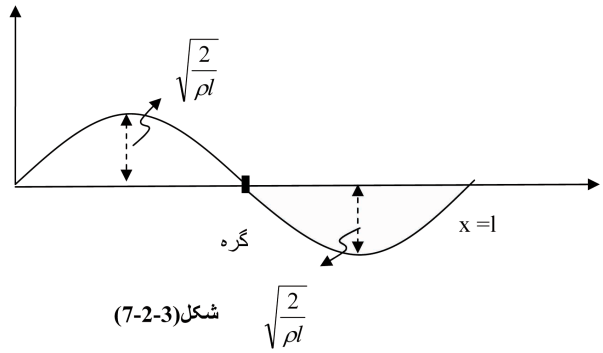
شکل(5-2-3)

شکل مُد های نرمالایز $(Normalize)$ ارتعاش : $f_n^{(N)}(x) = \sqrt{\frac{۲}{\rho l}} \sin \beta_n x$



$$f_۱^{(N)}(x) = \sqrt{\frac{۲}{\rho l}} \sin \frac{\pi}{l} x$$
$$\omega_۱ = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

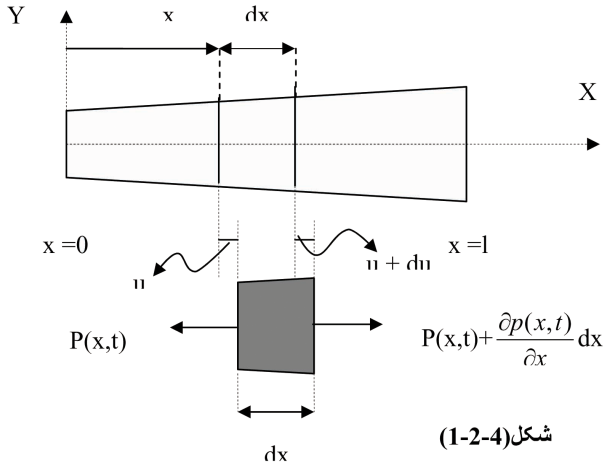
شکل(6-2-3)



$$f_۲^{(N)}(x) = \sqrt{\frac{۲}{\rho l}} \sin \frac{۲\pi}{l} x$$
$$\omega_۲ = \frac{۲\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

شکل(7-2-3)

۴—۲— برای ارتعاشات طولی میله‌ای $(Longitudional\ Vibartion\ Of\ Rods)$ به طول l و جرم بر واحد طول اولیه $m(x)$ که در $x = ۰$ و $x = l$ آزاد می باشد .
معادله دیفرانسیل حرکت را بدست آورده و معادله فرکانس را تشکیل دهید :



شکل(4-2-1)

اگرسمت چپ المنت به اندازه u جابجا شود ، سمت راست به اندازه $u + du$ جابجا می شود. بنابر این با توجه به بار محوری داریم :(جابجایی تابعی از (x, t) است)

باتوجه به قانون دوم نیوتون $(Second\ Law\ Newton)$:

$$P + \frac{\partial P}{\partial x}dx - P = m(x)\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲}dx \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = m(x)\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲}$$

از طرفی داریم :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon(x,t) = \frac{\sigma(x,t)}{E} = \frac{P(x,t)}{A(x)E} \Longrightarrow P = EA\frac{\partial u}{\partial x}$$

اگر P را در معادله بالا جا گذاری کنیم :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[EA\frac{\partial u}{\partial x}\right] = m(x)\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲}$$

حال باید معادله را بدست آوریم :

$$If\ :\qquad u(x,t) = f(x)g(t) = \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'g, \quad \frac{\partial^{۲} u}{\partial t^{۲}} = f\ddot{g} \quad \Longrightarrow$$

$$g\frac{d}{dx}[EA(x)f'(x)] = m(x)f(x)\ddot{g} \Longrightarrow \frac{۱}{m(x)f(x)}\frac{d}{dx}[EA(x)f'(x)] = \frac{\ddot{g}}{g} = -\omega^{۲} \Longrightarrow$$

$$\frac{۱}{m(x)f(x)}\frac{d}{dx}[EA(x)f'(x)] = \frac{\ddot{g}}{g} = -\omega^{۲} \begin{cases} \nearrow \ddot{g} = -\omega^{۲} g \Longrightarrow g(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t \\ \searrow E[A'(x)f'(x) + A(x)f''(x) = -m\omega^{۲} f(x) \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}[EA(x)f'(x)] + \omega^{۲} m(x)f(x) = ۰ \Longrightarrow EA(x)f''(x) + EA'(x)f'(x) + m(x)\omega^{۲} f(x) = ۰$$

$$f''(x) + \frac{A'(x)}{A(x)}f'(x) + \omega^{۲}\frac{m(x)}{EA(x)}f(x) = ۰$$

برای حل معادله:

باید $A(x)$,m (x) رامعلوم کنیم.

$$Assume \ : \ \begin{cases} m(x) = m = Costant \\ A(x) = A = Constant \end{cases} \Longrightarrow f''(x) + \frac{m\omega^{۲}}{EA}f(x) = ۰$$

$$If \ : \ \frac{m\omega^{۲}}{EA} = \beta^{۲} \Longrightarrow f'' + \beta^{۲} f = ۰ \Longrightarrow$$

$$f(x) = C\sin\beta x + D\cos\beta x$$

شرایط مرزی مختلف رامی نویسیم:

(۱)شرایط مرزی درتیردوسرگیردار:

$$f(x)\,|_{x=۰} = ۰ \ ,f \ \ (x)\,|_{x=l} = ۰ \Longrightarrow$$

$$u(x,t)\,|_{x=۰} = ۰ \Longrightarrow f(x)g(t)\,|_{x=۰} = ۰ \Longrightarrow^{g(t)\neq ۰} \ f(x)\,|_{x=۰} = ۰$$

(۲)شرایط مرزی درتیریک‌سرگیردار(درانتها $x = l$ آزاد):

$$f(x)\mid_{x=0} = 0 \;, P\;(x,t)\mid_{x=l} = 0 \Longrightarrow$$

$$EA\frac{\partial u}{\partial x}\mid_{x=l} = 0 \Longrightarrow f'(x)\mid_{x=l} = 0$$

(۳)شرایط مرزی درتیردوسر آزاد:

$$EA\frac{\partial u}{\partial x}\mid_{x=0} = 0 \;, EA\;\frac{\partial u}{\partial x}\mid_{x=l} = 0 \Longrightarrow$$

$$f'(x)\mid_{x=0} = 0 \;, f\;'(x)\mid_{x=l} = 0$$

فرض می‌کنیم‌شرایط مرزی دوسر آزاداست:

$$f'(x)\mid_{x=0} = 0 \Longrightarrow C\beta\cos\beta x\mid_{x=0} - D\beta\sin\beta x\mid_{x=0} = 0 \Longrightarrow$$

$$C\beta = 0 \Longrightarrow^{\beta\neq 0} \quad C = 0$$

$$f'(x)\mid_{x=l} = 0 \Longrightarrow -D\beta\sin\beta l = 0 \Longrightarrow^{D\neq 0} \quad \sin\beta l = 0$$

$$\beta l = n\pi \Longrightarrow \beta_n = \frac{n\pi}{l} \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

دراین‌صورت:

$$f(x) = D\cos\frac{n\pi}{l}x$$

بنابراین‌مقادیرویژه ($EigenValue$) یافرکانسهای‌طبیعی ω_n :

$$\omega_n = \beta_n\sqrt{\frac{EA}{m}} = \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{EA}{m}} \qquad n = 0, 1, 2, ..$$

حل می‌توان بردارهای ویژه($EigenVector$) یامُد های طبیعی ارتعاش ϕ_nرا بدست آوردورسم کرد.

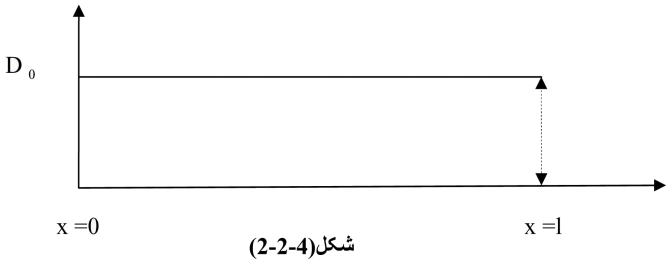
$$u_n(x,t) = D_n\cos\beta_n x\; g(t) \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

مُدمتناظربا $\beta_\circ = \circ$: $u_\circ(x,t) = D_\circ g(t)$.

به‌این مُد ، مُد صلب سیستم می گویند که نمایشگر جابجا ی یکسا ن ب رای‌همه نقا ط میله ا س ت .

معمولااین حالت برای اجسامی است که مقید نشده باشند. (شرایط دوسر آزاداست)

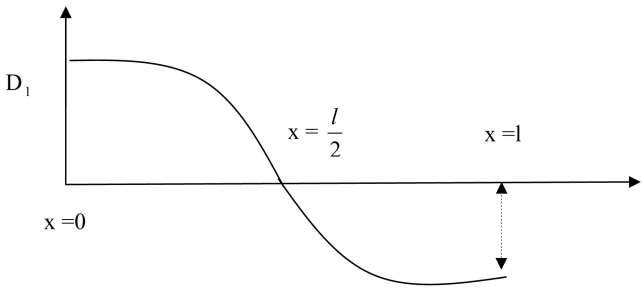
شکل مُدهاطبیعی ارتعاش:



$u_\circ(x,t) = D_\circ g(t)$

$\beta_\circ = \circ$

شکل(2-2-4)



$u_1(x,t) = D_1 \cos\beta_1 x g(t)$

$\beta_1 = \frac{\pi}{l}$

شکل(3-2-4)

$u_2(x,t) = D_2 \cos\beta_2 x g(t)$

$\beta_2 = \frac{2\pi}{l}$

خاصیت اُرتوگونالیتی ($Orthogonality and Normalization$):

$$\int_\circ^l m(x) u_n(x,t) u_m(x,t) dx = \delta_{mn}$$

$$If\ \ : m \neq n \Longrightarrow D_n D_m [g(t)]^{۲} m \int_{۰}^{l} \cos\beta_n x \cos\beta_m x dx = ۰ \Longrightarrow$$

$$D_n D_m m \int_{۰}^{l} \cos\beta_n \cos\beta_m x dx = ۰$$

$$If\ \ : m = n \Longrightarrow D_n^{۲} [g(t)]^{۲} m \int_{۰}^{l} \cos^{۲} \beta_n x dx = ۱ \Longrightarrow$$

$$D_n^{۲} m \int_{۰}^{l} \cos^{۲} \beta_n x dx = ۱ \Longrightarrow D_n^{۲} m \times \frac{۱}{۲} \int_{۰}^{l} (۱ + \cos ۲\beta_n x) dx \Longrightarrow$$

$$\frac{m D_n^{۲}}{۲} \left[x + \frac{۱}{۲\beta_n} \sin ۲\beta_n x \right]_{۰}^{l} = \frac{m D_n^{۲}}{۲} (l + ۰) = ۱ \Longrightarrow$$

$$D_n = \sqrt{\frac{۲}{ml}}$$

باید دقت کرد که این انتگرال برای $D_۰$ کار نمی کند.
پس برای $D_۰$ انتگرال جداگانه می گیریم :

$$D_۰^{۲} m \int_{۰}^{l} dx = m D_۰^{۲} l = ۱ \Longrightarrow D_۰ = \sqrt{\frac{۱}{ml}}$$

شکل مُد های نرمالایز $(Normalize)$ ارتعاش :

$$u_n^{(N)}(x,t) = \sqrt{\frac{۲}{ml}} \cos\beta_n x g(t) \qquad n = ۱, ۲, ۳...$$

$$If\ \ : n = ۰ \ \ \Longrightarrow u_۰(x,t) = \sqrt{\frac{۱}{ml}} g(t)$$

حال می توان شکل مُد های نرمالایز $(Normalize)$ ارتعاش را رسم کرد.

نحوه انجام مراحل فوق:
۱– بدست آوردن معادله دیفرانسیل سیستم .(که این معادله را می توان با استفاده از روش همیلتون $(Hamilton\ Method)$ نیز بدست آورد)
۲– حل کردن معادله دیفرانسیل بدست آمده .
۳– بکار بردن شرایط مرزی مختلف .(دو سر آزاد ، دو سر گیردار ، یکسر آزاد یک سر

گیردار)
۴– حل مسئله برای شرط مرزی مشخص شده .
۵– پیدا کردن فرکانسهای طبیعی سیستم ω و مُد ها طبیعی ارتعاش ϕ .
٦– رسم شکل مُدهای طبیعی ارتعاش ϕ .
۷– بررسی خاصیت اُرتوگونالیتی (تعامدی) $(Orthogonality)$.
۸– نرمالایز $(Normalize)$ کردن مُدهای طبیعی ارتعاش .
۹– رسم شکل مُد های نرمالایز $(Normalize)$ شده ارتعاش .

حال درادامه معادله دیفرانسیل سیستم را از روش همیلتون $(Hamilton\ Method)$ به دست می آوریم .

انرژی جنبشی(T):

$$T = \frac{۱}{۲} m V^{۲}$$

$$dT = \frac{۱}{۲} \dot{u}^{۲} dm = \frac{۱}{۲} (\frac{\partial u}{\partial t})^{۲} m(x) dx \Longrightarrow$$

$$T = \frac{۱}{۲} \int_{۰}^{l} m(x) (\frac{\partial u}{\partial t})^{۲} dx$$

انرژی پتانسیل (U):

$$U = \frac{۱}{۲} k u^{۲} \Longrightarrow^{F=ku} \ U = \frac{۱}{۲} F u = \frac{۱}{۲} P u \Longrightarrow$$

$$dU = \frac{۱}{۲} P du = \frac{۱}{۲} EA(x) \frac{\partial u}{\partial x} du \Longrightarrow^{du=\frac{\partial u}{\partial x} dx}$$

$$U = \frac{۱}{۲} \int_{۰}^{l} EA(x) (\frac{\partial u}{\partial x})^{۲} dx$$

کارانجام شده (W): نیروی خارجی نداریم . $W = ۰$

روش همیلتون $(Hamilton\ Method)$ را اجرا می کنیم :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U + \underbrace{W}_{=0})dt = 0$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \left[\int_0^l m(x)(\frac{\partial u}{\partial t})^2 dx - \int_0^l EA(x)(\frac{\partial u}{\partial x})^2 dx \right] dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \left[\int_0^l m(x)\delta(\frac{\partial u}{\partial t})^2 dx - \int_0^l EA(x)\delta(\frac{\partial u}{\partial x})^2 dx \right] dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^l m(x)\frac{\partial u}{\partial t}\delta(\frac{\partial u}{\partial t})dx - \int_0^l EA(x)\frac{\partial u}{\partial x}\delta(\frac{\partial u}{\partial x})dx \right] dt = 0$$

اگر $\delta(\frac{\partial u}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(\delta u)$:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^l m(x)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}(\delta u)dx - \int_0^l EA(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(\delta u)dx \right] dt = 0$$

انتگرال را به دو قسمت تقسیم می کنیم .

$$I_1 = \int_0^l dx \int_{t_1}^{t_2} m(x)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}(\delta u)dt$$

حل انتگرال به روش جزء به جزء $(Part\ to\ Part)$:

$$\begin{cases} m(x)\frac{\partial u}{\partial t} = u^* \Longrightarrow m(x)\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial t})dt = du^* \\ \frac{\partial(\delta u)}{\partial t}dt = dv^* \Longrightarrow v^* = \delta u \end{cases}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} m(x)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}(\delta u)dt = \underbrace{m(x)\frac{\partial u}{\partial t}\delta u \mid_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \int_{t_1}^{t_2} m(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta u dt$$

بنابر این (I_1) :

$$I_1 = -\int_0^l \int_{t_1}^{t_2} m(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta u dx dt$$

$$I_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l EA(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(\delta u)dx$$

حل انتگرال به روش جزء به جزء $(Part\ to\ Part)$:

$$\begin{cases} EA(x)\frac{\partial u}{\partial x} = u^* \Longrightarrow E\frac{\partial}{\partial x}\left[A(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]dx = du^* \\ \frac{\partial(\delta u)}{\partial x}dx = dv^* \Longrightarrow v^* = \delta u \end{cases}$$

$$\int_{\circ}^{l} EA(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(\delta u)dx = \underbrace{E(A)\frac{\partial u}{\partial x}\delta u\,|_{\circ}^{l}}_{=\circ} - \int_{\circ}^{l} E\frac{\partial}{\partial x}[A(x)\frac{\partial u}{\partial x}]\delta u dx$$

بنابر این $(I_۲)$:

$$I_۲ = -\int_{t_۱}^{t_۲}\int_{\circ}^{l} E\frac{\partial}{\partial x}[A(x)\frac{\partial u}{\partial x}]\delta u dx dt$$

با جاگذاری $(I_۱)$ و $(I_۲)$ خواهیم داشت :

$$\int_{t_۱}^{t_۲}\left[\int_{\circ}^{l}(\ -m(x)\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲} + E\frac{\partial}{\partial x}[A(x)\frac{\partial u}{\partial x}]\ )\delta u\ dx\right]dt = \circ$$

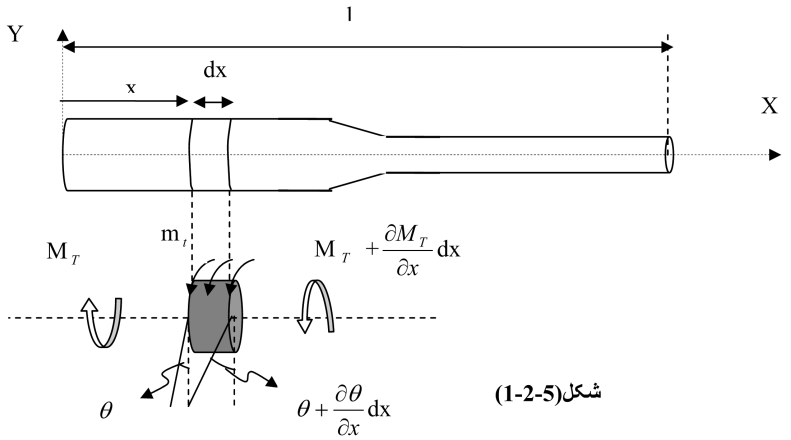
حاصل این انتگرال وقتی صِفر است که :

$$-m(x)\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲} + E\frac{\partial}{\partial x}[A(x)\frac{\partial u}{\partial x}] = \circ$$

بنابر این معادله دیفرانسیل سیستم بر اساس روش همیلتون $(Hamilton\ Method)$:

$$E\frac{\partial}{\partial x}[A(x)\frac{\partial u}{\partial x}] = m(x)\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲}$$

۵—۲— ارتعاشات پیچشی میله ای به طول l و گشتاور بر واحد طول المنت m_t که در $x = ۰$ و $x = l$ آزاد می باشد.
معادله دیفرانسیل حرکت و معادله فرکانس را تشکیل دهید :



شکل(1-2-5)

با توجه به المنت در نظر گرفته شده بالا (دیاگرام آزاد $(F.B.D)$) ، زاویه پیچشی اگر برای سمت چپ θ باشد برای سمت راست $\theta + \frac{\partial \theta}{\partial x}dx$ می باشد.
روابط تابعی از (x,t) هستند.

قانون دوم نیوتون $(Second\ Law\ Newton)$:

$$\sum M = I\alpha$$

$$M_T + \frac{\partial M_T}{\partial x}dx - M_T + m_t dx = I(x)\frac{\partial^۲ \theta}{\partial t^۲}dx \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial M_T}{\partial x} + m_t = I(x)\frac{\partial^۲ \theta}{\partial t^۲}$$

I ممان اینرسی بر واحد طول است که در حالت کلی تابعی از x می باشد.
حال اگر سختی پیچشی یعنی $(M_T = GJ(x)\frac{\partial \theta}{\partial x})$ را جاگذاری کنیم.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[GJ(x)\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x}\right] + m_t(x,t) = I(x)\frac{\partial^۲ \theta(x,t)}{\partial t^۲}$$

برای حل معادله از روش جداسازی متغیرها می رویم .
در اینجا ارتعاشات ما ، ارتعاشات آزاد$(Free\ Vibration)$ می باشد. بنابراین $m_t(x,t) = ۰$

خواهد بود .

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[GJ(x)\frac{\partial\theta}{\partial x}\right] = I(x)\frac{\partial^{۲}\theta}{\partial t^{۲}}$$

$$If \ : \qquad \theta(x,t) = f(x)g(t)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = f'g \ \ , \ \ \frac{\partial^{۲}\theta}{\partial t^{۲}} = f\ddot{g} \Longrightarrow$$

$$Gg(t)[J'(x)f'(x) + J(x)f''(x)] = I(x)f(x)\ddot{g}(t)$$

$$\ddot{g} = -\omega^{۲}g \Longrightarrow g(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

تابع نهایی ما سینوسی $(Sinusoidal)$ است.
برای حل این معادله فرض می کنیم که $I(x) = I = Constant$ و $J(x) = J = Constant$ باشند.
بنابر این :

$$\frac{GJ}{I}\frac{f''}{f} = -\omega^{۲} \Longrightarrow f'' = -\frac{\omega^{۲}I}{GJ}f$$

$$If \ : \ \frac{\omega^{۲}I}{GJ} = \beta^{۲} \Longrightarrow f'' = -\beta^{۲}f \Longrightarrow$$

$$f(x) = C\sin\beta x + D\cos\beta x$$

شرایط مرزی مختلف را می نویسیم :

(۱) شرایط مرزی در تیر دو سر گیردار :

$$\theta(x,t)\mid_{x=۰} = ۰ \ \ , \ \ \theta(x,t)\mid_{x=l} = ۰$$

(۲) شرایط مرزی در تیر یک سرگیردار، یک سر آزاد :

$$\theta(x,t)\mid_{x=۰} = ۰ \ \ , \ \ M_T(x,t)\mid_{x=l} = GJ\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\mid_{x=l} = ۰ \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} \mid_{x=l} = ۰$$

(۳) شرایط مرزی در تیر دو سر آزاد :

$$M_T(x,t) \mid_{x=۰} = ۰ \Longrightarrow GJ\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \mid_{x=۰} = ۰$$

$$M_T(x,t) \mid_{x=l} = ۰ \Longrightarrow GJ\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \mid_{x=l} = ۰$$

فرض می کنیم در $x = ۰$ گیردار و در $x = l$ آزاد است .

$$\theta(x,t) \mid_{x=۰} = ۰ \Longrightarrow^{g(t)\neq ۰} \quad f(x) \mid_{x=۰} = ۰ \Longrightarrow D = ۰$$

$$f(x) = C \sin \beta x$$

$$\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \mid_{x=l} = ۰ \Longrightarrow f'(x) \mid_{x=l} = ۰ \Longrightarrow$$

$$C\beta \cos \beta x \mid_{x=l} = ۰ \Longrightarrow^{C\beta\neq ۰} \quad \cos \beta l = ۰$$

در این صورت :

$$\beta l = n\pi \pm \frac{\pi}{۲} = \frac{(۲n \pm ۱)}{۲}\pi$$

$$\beta_n = \frac{(۲n \pm ۱)\pi}{۲l} \qquad n = ۱, ۲, ۳, ...$$

بنابر این مقادیر ویژه $(Eigen\ Value)$ یا فرکانسهای طبیعی ω_n :

$$\omega_n = \beta_n \sqrt{\frac{GJ}{I}} \Longrightarrow \omega_n = \frac{(۲n \pm ۱)\pi}{۲l}\sqrt{\frac{GJ}{I}}$$

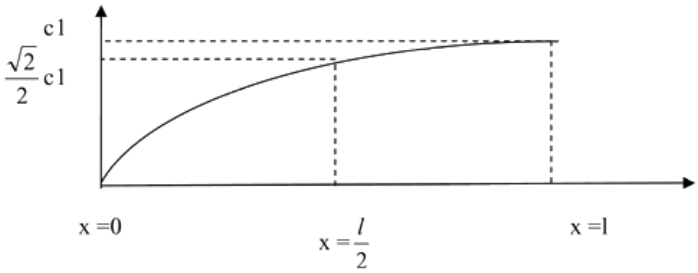
حال می توان بردار های ویژه$(Eigen\ Vector)$ یامُد های طبیعی ارتعاش ϕ_n را بدست آورد و رسم کرد .

$$\theta_n(x,t) = C_n \sin \beta_n x\ g(t)$$

اگر تابع را وابسته به x در نظر بگیریم .

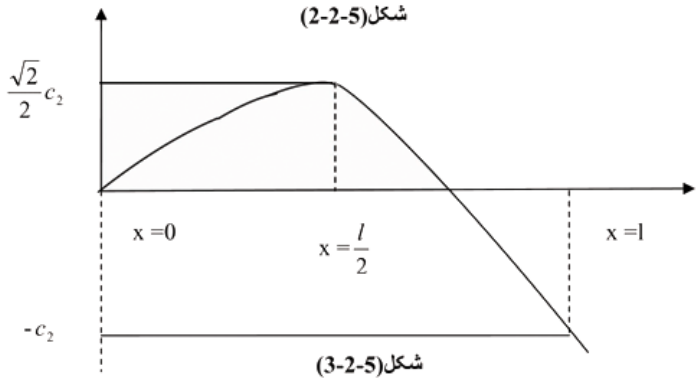
$$\theta_n^\star(x) = C_n \sin \beta_n x$$

شکل مُد ها طبیعی ارتعاش :



شکل(5-2-2)

$$\theta_1^\star(x) = C_1 \sin \frac{\pi}{2l} x$$
$$\omega_1 = \frac{\pi}{2l}\sqrt{\frac{GJ}{I}}$$



شکل(5-2-3)

$$\theta_2^\star(x) = C_2 \sin \frac{3\pi}{2l} x$$
$$\omega_2 = \frac{3\pi}{2l}\sqrt{\frac{GJ}{I}}$$

حال خاصیت اُرتوگونالیتی (تعامدی) $(Orthogonality)$:

$$\int_0^l m_t \theta_n^\star(x)\theta_m^\star(x)dx = \delta_{mn}$$

که آن را در حالت $m \neq n$ و $m = n$ بررسی می کنیم .
بعد از آن می توانیم شکل مُدهای نرمالایز $(Normalize)$ شده را رسم کنیم.

$$\int_0^l m_t \theta_n^\star(x)\theta_m^\star(x)dx = \delta_{mn} = \begin{cases} \delta_{mn} = 0 & n \neq m \\ \delta_{mn} = 1 & m = n \end{cases}$$

$$If \ : m \neq n \Longrightarrow \int_0^l m_t \theta_n^\star(x)\theta_m^\star(x)dx = 0$$

$$If \ : m = n \Longrightarrow \int_0^l m_t \theta_n^\star(x)\theta_m^\star(x)dx = \delta_{mn} = 1 \Longrightarrow$$

$$\int_0^l m_t \theta_n^{2\star}(x)dx = C_n^2 m_t \int_0^l \sin^2 \beta_n x dx = C_n^2 m_t \int_0^l (\frac{1 - \cos 2\beta_n x}{2})dx =$$

$$\frac{C_n^2}{2} m_t \int_0^l (1 - \cos 2\beta_n x)dx = \frac{C_n^2}{2} m_t \left[x - \frac{\sin 2\beta_n x}{2\beta_n}\right]_0^l = 1 \Longrightarrow$$

$$\frac{C_n^{۲} l}{۲} m_t = ۱ \Longrightarrow C_n = \sqrt{\frac{۲}{m_t l}}$$

$$\theta_n^{(N)\star} x = \sqrt{\frac{۲}{m_t l}} \sin \beta_n x, \omega \qquad {}_n = \frac{\pi(۲n \pm ۱)}{۲l} \sqrt{\frac{GJ}{I}}$$

درادامه معادله دیفرانسیل سیستم رااز روش همیلتون ($HamiltonMethod$) به‌دست می آوریم.

انرژی جنبشی ($T^\star$):

$$T^\star = \frac{۱}{۲} I \dot{\theta}^{۲}$$

$$dT^\star = \frac{۱}{۲} \omega^{۲} dI \Longrightarrow dT^\star = \frac{۱}{۲} (\frac{\partial \theta}{\partial t})^{۲} I(x) dx \Longrightarrow$$

$$T^\star = \frac{۱}{۲} \int_{۰}^{l} I(x) (\frac{\partial \theta}{\partial t})^{۲} dx$$

انرژی پتانسیل ($U^\star$):

$$U^\star = \frac{۱}{۲} k_t \theta^{۲}$$

$$U^\star = \frac{۱}{۲} \underbrace{k_t \theta}_{T} \theta = \frac{۱}{۲} T \theta \Longrightarrow dU^\star = \frac{۱}{۲} T(x,t) d\theta$$

$$dU^\star = \frac{۱}{۲} GJ(x) \frac{\partial \theta}{\partial x} d\theta \Longrightarrow^{d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} dx} \quad dU^\star = \frac{۱}{۲} GJ(x) (\frac{\partial \theta}{\partial x})^{۲} dx$$

$$U^\star = \frac{۱}{۲} \int_{۰}^{l} GJ(x) (\frac{\partial \theta}{\partial x})^{۲} dx$$

کارانجام‌شده ($W^\star$):

$$\frac{d}{d\theta} (\frac{dW^\star}{dx}) = m_t(x,t)$$

$$\frac{dW^\star}{dx} = m_t(x,t)\theta \Longrightarrow dW^\star = m_t(x,t)\theta dx \Longrightarrow$$

$$W^\star = \int_\circ^l m_t(x,t)\theta(x,t)dx$$

روش همیلتون ($HamiltonMethod$) را اجرا می کنیم:

$$\delta \int_{t_۱}^{t_۲} (T^\star - U^\star + W^\star)dt = \circ$$

$$\delta \int_{t_۱}^{t_۲} \left[\frac{۱}{۲} \int_\circ^l I(x)(\frac{\partial\theta}{\partial t})^۲ dx - \frac{۱}{۲} \int_\circ^l GJ(x)(\frac{\partial\theta}{\partial x})^۲ dx + \int_\circ^l m_t(x,t)\theta(x,t)dx \right] dt = \circ$$

اگر انتگرال بالا را به ۳ قسمت تقسیم کنیم:

$$I_۱ = \delta \int_{t_۱}^{t_۲} \left[\int_\circ^l \frac{۱}{۲} I(x)(\frac{\partial\theta}{\partial t})^۲ dx \right] dt$$

$$I_۱ = \int_{t_۱}^{t_۲} \int_\circ^l \frac{۱}{۲} I(x)\delta(\frac{\partial\theta}{\partial t})^۲ dxdt = \int_{t_۱}^{t_۲} \int_\circ^l \frac{\partial\theta}{\partial t} I(x)\delta(\frac{\partial\theta}{\partial t})dxdt \Longrightarrow$$

$$I_۱ = \int_{t_۱}^{t_۲} \int_\circ^l I(x)\frac{\partial\theta}{\partial t}\frac{\partial(\delta\theta)}{\partial t}dxdt = \int_\circ^l I(x)dx \int_{t_۱}^{t_۲} \frac{\partial\theta}{\partial t}\frac{\partial(\delta\theta)}{\partial t}dt$$

حل انتگرال به روش جزء به جزء ($ParttoPart$):

$$\begin{cases} \frac{\partial\theta}{\partial t} = u \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial\theta}{\partial t})dt = du \\ \frac{\partial(\delta\theta)}{\partial t}dt = dv \Longrightarrow \delta\theta = v \end{cases}$$

$$\int_{t_۱}^{t_۲} \frac{\partial\theta}{\partial t}\frac{\partial(\delta\theta)}{\partial t}dt = \underbrace{\frac{\partial\theta}{\partial t}\delta\theta \mid_{t_۱}^{t_۲}}_{=\circ} - \int_{t_۱}^{t_۲} \delta\theta\frac{\partial^۲\theta}{\partial t^۲}dt$$

بنابراین ($I_۱$):

$$I_۱ = -\int_\circ^l \int_{t_۱}^{t_۲} I(x)\delta\theta\frac{\partial^۲\theta}{\partial t^۲}dxdt$$

$$I_۲ = \delta \int_{t_۱}^{t_۲} \left[\frac{۱}{۲} \int_{\circ}^{l} GJ(x)(\frac{\partial \theta}{\partial x})^۲ dx \right] dt = \int_{t_۱}^{t_۲} \int_{\circ}^{l} \frac{۱}{۲} GJ(x)\delta(\frac{\partial \theta}{\partial x})^۲ dxdt \Longrightarrow$$

$$I_۲ = \int_{t_۱}^{t_۲} \int_{\circ}^{l} GJ(x)\frac{\partial \theta}{\partial x}\delta(\frac{\partial \theta}{\partial x})dxdt = \int_{t_۱}^{t_۲} dt \int_{\circ}^{l} GJ(x)\frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial(\delta\theta)}{\partial x}dx$$

حل انتگرال به روش جزء به جزء $(Part\ to\ Part)$:

$$\begin{cases} J(x)\frac{\partial \theta}{\partial x} = u \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}(J(x)\frac{\partial \theta}{\partial x})dx = du \\ \frac{\partial(\delta\theta)}{\partial x}dx = dv \Longrightarrow \delta\theta = v \end{cases}$$

$$\int_{\circ}^{l} GJ(x)\frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial(\delta\theta)}{\partial x}dx =$$

$$\underbrace{J(x)\frac{\partial \theta}{\partial x}\delta\theta \mid_{x=\circ}^{x=l}}_{=\circ} - G\int_{\circ}^{l} \delta\theta \frac{\partial}{\partial x}(J(x)\frac{\partial \theta}{\partial x})dx$$

بنابر این $(I_۲)$:

$$I_۲ = -\int_{t_۱}^{t_۲} \int_{\circ}^{l} G\delta\theta \frac{\partial}{\partial x}(J(x)\frac{\partial \theta}{\partial x})dtdx$$

حال $(I_۳)$ را بدست می آوریم :

$$I_۳ = \delta \int_{t_۱}^{t_۲} \left[\int_{\circ}^{l} m_t(x,t)\theta(x,t)dx \right] dt = \int_{t_۱}^{t_۲} \int_{\circ}^{l} m_t\delta\theta(x,t)dxdt$$

در این صورت خواهیم داشت :

$$-I_۱ + I_۲ - I_۳ = \circ$$

در نتیجه :

$$\int_{\circ}^{l} \int_{t_۱}^{t_۲} I(x)\delta\theta \frac{\partial^۲ \theta}{\partial x^۲}dxdt - \int_{\circ}^{l} \int_{t_۱}^{t_۲} G\delta\theta \frac{\partial}{\partial x}(J(x)\frac{\partial \theta}{\partial x})dxdt -$$

$$\int_{t_۱}^{t_۲} \int_{\circ}^{l} m_t\delta\theta dtdx = \circ \Longrightarrow$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta\theta \left[\int_0^l \left(I(x)\frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} - G\frac{\partial}{\partial x}(J(x)\frac{\partial \theta}{\partial x}) - m_t(x,t) \right) dx \right] dt = 0$$

بنابراین براساس اصل همیلتون $(Hamilton)$، در صورتی معادله بالا صِفر خواهد بود که :

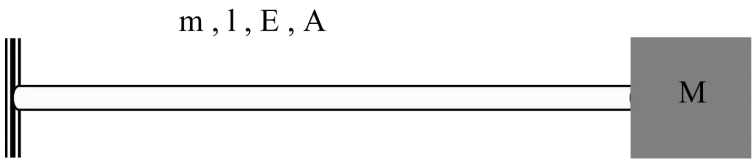
$$I(x)\frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} - G\frac{\partial}{\partial x}(J(x)\frac{\partial \theta}{\partial x}) - m_t(x,t) = 0$$

که این همان معادله دیفرانسیل حرکت است.

---

۶ — ۲ — بررسی ارتعاشات طولی میله ای با شرایط وزی غیر متعارف ، میله ای به طول l و جرم بر واحد طول m را مطابق شکل در نظر بگیرید و فرض کنید میله در $x = 0$ گیردار و در $x = l$ متصل به جرم M می‌باشد.

معادله فرکانسی را پیدا کنید:



شکل(6-2-1)

M در شرایط مرزی تاثیر دارد ولی در معادله دیفرانسیل تاثیری ندارد.

براین اساس طبق ارتعاشات طولی میله:

$$P + \frac{\partial P}{\partial x}dx - P = m(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = m(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

ازطرفی داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon(x,t) = \frac{\sigma(x,t)}{E} = \frac{P(x,t)}{A(x)E} \Longrightarrow P = EA(x)\frac{\partial u}{\partial x}$$

اگر P را در معادله بالا قرار دهیم :

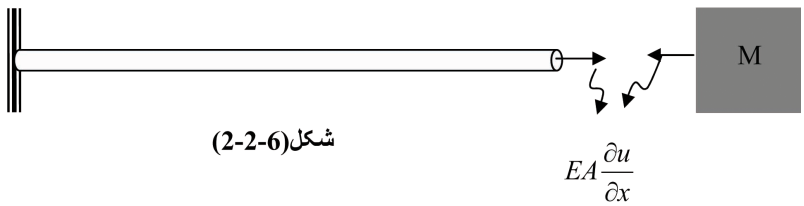
$$\frac{\partial}{\partial x}\left[EA(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = m(x)\frac{\partial^{۲} u}{\partial t^{۲}}$$

که اگر فرض کنیم :

$$Assume\ :\ \begin{cases} m(x) = m = Costant \\ A(x) = A = Constant \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial^{۲} u}{\partial x^{۲}} = \frac{m}{EA}\frac{\partial^{۲} u}{\partial t^{۲}}$$

با رسم دیاگرام آزاد $(F.B.D)$ برای جرم M بزرگ داریم :



شکل(2-2-6)

با توجه به قانون دوم نیوتون $(Second\ Law\ Newton)$:

$$\sum F = ma$$

$$AE\frac{\partial u}{\partial x} = M\frac{\partial^{۲} u}{\partial t^{۲}}$$

که $AE\frac{\partial u}{\partial x}$ نیروی طولی میله که جسم را به سمت خود می کشد.

$$If\ :\qquad u(x,t) = f(x)g(t) = \Rightarrow$$

حال می توان در لبه $x = ۰$(شرط اول که بر اساس معادله میله) و $x = l$(شرط دوم که بر اساس معادله جسم) را نوشت .
شرایط مرزی :

$$If\ :\ x = ۰ \qquad u(x,t)\mid_{x=۰} = ۰ \Longrightarrow f(x)\mid_{x=۰} = ۰$$

$$If \ : \ x = l \qquad EA\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{M}{EA}\frac{\partial^{۲} u(x,t)}{\partial t^{۲}} \mid_{x=l}$$

در این صورت :

$$f'(x)g(t) \mid_{x=l} = \frac{M}{EA} f(x)\ddot{g}(t) \mid_{x=l} \Longrightarrow f'(x) \mid_{x=l} = -\frac{M\omega^{۲}}{EA} f(x) \mid_{x=l}$$

بنابر این :

$$\frac{\beta^{۲}}{m} = \frac{\omega^{۲}}{EA}$$

$$f(x) = C_{۱} \sin\beta x + C_{۲} \cos\beta x$$

حال اگر جاگذاری کنیم :

$$If \ : \ x = ۰ \qquad \Longrightarrow f(x) = ۰ \Longrightarrow C_{۲} = ۰$$

$$If \ : \ x = l \qquad \Longrightarrow \beta C_{۱} \cos\beta x \mid_{x=l} = -\frac{M}{m}\beta^{۲} C_{۱} \sin\beta x \mid_{x=l} \Longrightarrow$$

$$\beta^{۲} = \frac{\omega^{۲} m}{EA}$$

$$\beta \cos\beta x = -\frac{M}{m}\beta \sin\beta l \Longrightarrow \cos\beta l = -\frac{M}{ml}\beta l \sin\beta l = -\frac{M}{\bar{m}}\beta l \sin\beta l \Longrightarrow$$

$\bar{m} =$ جرم کل تیر

$$\beta l = z \Longrightarrow \cos z = -\frac{M}{\bar{m}} z \sin z \Longrightarrow \cot z = -\frac{M}{\bar{m}} z$$

حال باید z را بدست آوریم و توسط z ، β بدست خواهد آمد حال می توان مُدهای طبیعی ارتعاش را رسم نمود.

بقیه مراحل به صورت عددی $(Numerical)$ مانند قبل می باشد.

که در این صورت β_n بدست آمده و توسط آن ω_n را بدست می آوریم .

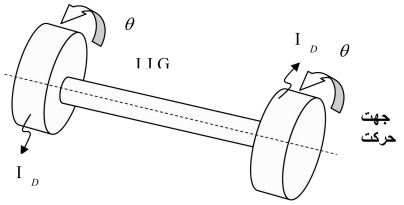
سپس رسم شکل مُدهای طبیعی ارتعاش ϕ .

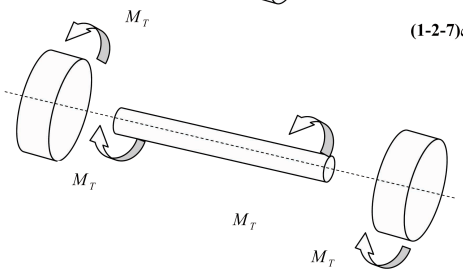
و بررسی خاصیت اُرتوگونالیتی (تعامدی) $(Orthogonality)$.

و نرمالایز $(Normalize)$ کردن مُدهای طبیعی ارتعاش .

۷—۲— برای بررسی ارتعاشات پیچشی میله با شرایط غیر متعارف (غیر کلاسیک) میله یکنواخت به طول l با ممان اینرسی قطبی J و ممان اینرسی جرمی قطبی بر واحد طول I را مطابق شکل در نظر بگیرید.

فرض کنید میله در دو انتها به دیسک با ممان اینرسی های جرمی قطبی I_D متصل باشد. معادله فرکانسی را پیدا کنید :





شکل(7-2-1)

بر این اساس طبق ارتعاشات پیچشی میله :

قانون دوم نیوتون $(Second\ Law\ Newton)$:

$$\sum M = I\alpha$$

$$M_T + \frac{\partial M_T}{\partial x}dx - M_T + m_t dx = I(x)\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}dx \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial M_T}{\partial x} + m_t = I(x)\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

$I(x)$ ممان اینرسی بر واحد طول است.

حال اگر سختی پیچشی یعنی $(M_T = GJ(x)\frac{\partial \theta}{\partial x})$ را جاگذاری کنیم.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[GJ(x)\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x}\right] + \underbrace{m_t(x,t)}_{=0} = I(x)\frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} \Longrightarrow$$

چون ارتعاش آزاد است : $m_t(x,t) = 0$ و بنا بر فرض : $I(x) = I = Constant$ و $J(x) = J = Constant$.

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{I}{JG}\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

$$\theta(x,t) = f(x)g(t) \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial^{۲}\theta}{\partial x^{۲}} = f''g \ , \ \frac{\partial^{۲}\theta}{\partial t^{۲}} = f\ddot{g} \Longrightarrow$$

$$f''g = \frac{I}{JG} f\ddot{g} \Longrightarrow^{\div fg} \quad \frac{f''}{f} = \frac{I}{JG}\frac{\ddot{g}}{g} \Longrightarrow$$

$$\frac{JG}{I}\frac{f''}{f} = \frac{\ddot{g}}{g} = -\omega^{۲} \Longrightarrow$$

$$\frac{\ddot{g}}{g} = -\omega^{۲} \begin{matrix} \nearrow \ \ddot{g} = -\omega^{۲} g \\ \searrow \ GJf'' = -\omega^{۲} I f \end{matrix}$$

از طرفی :

$$\frac{JG}{I}\frac{f''}{f} = -\omega^{۲}$$

اگر $\beta^{۲} = \frac{I\omega^{۲}}{GJ}$ بنابر این :

$$\frac{f''}{f} = -\beta^{۲} \Longrightarrow f(x) = C_{۱}\sin\beta x + C_{۲}\cos\beta x$$

پس :

$$\theta(x,t) = (C_{۱}\sin\beta x + C_{۲}\cos\beta x)\ g(x)$$

شرایط مرزی را می نویسیم :

درشرایط مرزی در $x = ۰$ (میله و دیسک) و در $x = l$ (میله و دیسک) داریم . بنابر این :

شرط مرزی اول :

$$\begin{cases} (Shaft) \quad M_T(x,t)\mid_{x=۰} = GJ\frac{\partial\theta}{\partial x}\mid_{x=۰} \\ (Disk) \quad M_T(x,t)\mid_{x=۰} = I_D\frac{\partial^{۲}\theta}{\partial t^{۲}}\mid_{x=۰} \end{cases}$$

شرط مرزی دوم :

$$\begin{cases} (Shaft) \quad M_T(x,t)\mid_{x=l} = GJ\frac{\partial\theta}{\partial x}\mid_{x=l} \\ (Disk) \quad M_T(x,t)\mid_{x=l} = I_D\frac{\partial^{۲}\theta}{\partial t^{۲}}\mid_{x=l} \end{cases}$$

با توجه به شرایط مرزی داریم :

$$\begin{cases} (\star) \quad GJ\frac{\partial\theta}{\partial x}\mid_{x=0} = I_D\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\mid_{x=0} \\ (\star\star) \quad GJ\frac{\partial\theta}{\partial x}\mid_{x=l} = I_D\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\mid_{x=l} \end{cases}$$

$$(\star) \Longrightarrow GJC_1\beta = -\omega^2 I_D C_2 \Longrightarrow \beta C_1 = \frac{-\omega^2 I_D}{GJ}C_2 \Longrightarrow \beta C_1 = \frac{-\beta^2 I_D}{I}C_2$$

$$(\star\star) \Longrightarrow C_1\cos\beta l - C_2\sin\beta l = \frac{-\beta I_D}{I}(C_1\sin\beta l + C_2\cos\beta l)$$

اگر C_1 بر اساس C_2 قرار دهیم .

$$-\beta\frac{I_D}{I}C_2\cos\beta l - C_2\sin\beta l - \frac{\beta^2 I_D^2}{I^2}C_2\sin\beta l + \beta\frac{I_D}{I}C_2\cos\beta l = 0$$

اگر ساده کنیم .

$$C_2\sin\beta l(-1 - \beta^2\frac{I_D^2}{I^2}) = 0 \Longrightarrow \beta \neq 0 \Longrightarrow C_2\sin\beta l = 0 \Longrightarrow$$

$$\beta = \frac{n\pi}{l} \quad , \quad \omega_n = \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{GJ}{I}}$$

بنابر این $f_n(x)$ و ω_n بدست آمد .

بقیه مراحل :

رسم شکل مُدهای طبیعی ارتعاش ϕ .

بررسی خاصیت اُرتوگونالیتی (تعامدی) $(Orthogonality)$ و نرمالایز $(Normalize)$ کردن مُدهای طبیعی ارتعاش .

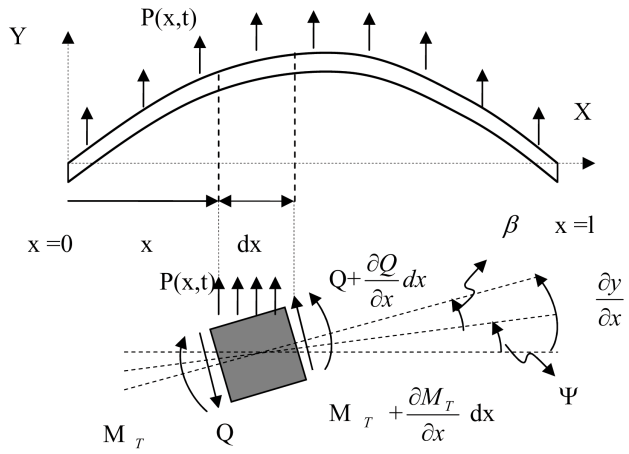
ارتعاشات عرضی تیر :

ارتعاشات عرضی تیر به دو روش بدست می آید.

۱– روش تیموشنکو $(First\ Order\ Deformation)$: در این روش از(تغییر شکل برشی) و (اینرسی چرخشی) صرف نظر نمی شود .

۲– روش اویلر – برنولی $(Euler\ Bernuli)$: در این روش از(تغییر شکل برشی) و (اینرسی چرخشی) صرف نظر می شود .

۸—۲— با استفاده از روش تیمو شنکو معادله دیفرانسیل حرکت و فرکانسهای طبیعی تیر زیر را به دست آورید:



شکل(8-2-1)

اگر تیر اویلر — برنولی بود اختلاف زاویه ای وجود نداشت . یعنی هر دو زاویه $\frac{\partial y}{\partial x}$ و ψ بر هم منطبق می شوند.

$m(x) =$ جرم بر واحد طول المان .

$I(x) =$ ممان اینرسی سطح .

$J(x) =$ ممان اینرسی جرمی بر واحد طول .

$\psi =$ زاویه چرخش به واسطه خمش .

$\beta =$ زاویه برش .

$\frac{\partial y}{\partial x} = \psi + \beta =$ زاویه برش + زاویه چرخش .

$M_T = EI\frac{\partial \psi}{\partial x} =$ ممان خمشی بر اساس زاویه چرخشی .

$Q = KGA\beta =$ رابطه بین Q و β که در آن : $K =$ ثابت وابسته به سطح مقطع —

$G =$ مدول برش — $A =$ سطح مقطع .

بر اساس قانون دوم نیوتون $(Second\ Law\ Newton)$:

$$\sum F_y = ma_y$$

$$-Q + Q + \frac{\partial Q}{\partial x}dx + P(x,t)dx = m(x)\frac{\partial^۲ y}{\partial t^۲}dx$$

اگر ساده کنیم :

$$(۱) \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} + P(x,t) = m(x)\frac{\partial^۲ y}{\partial t^۲}$$

از طرف دیگر :

$$\sum M = I\alpha$$

$$-M_T + M_T + \frac{\partial M_T}{\partial x}dx + Q\frac{dx}{۲} + (Q + \frac{\partial Q}{\partial x}dx)\frac{dx}{۲} + Pdx\frac{dx}{۲} = J(x)\frac{\partial^۲ \psi}{\partial t^۲}dx$$

اگر ساده کنیم :

$$(۲) \qquad \frac{\partial M_T}{\partial x} + Q = J(x)\frac{\partial^۲ \psi}{\partial t^۲}$$

اگر M_T, Q, β در (۱) و (۲) جاگذاری کنیم .

$$(۱) \quad \frac{\partial}{\partial x}\left[KGA(x)(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi)\right] + P(x,t) = m(x)\frac{\partial^۲ y}{\partial t^۲}$$

$$(۲) \quad \frac{\partial}{\partial x}\left[EI(x)\frac{\partial \psi}{\partial x}\right] + KGA(x)(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi) = J(x)\frac{\partial^۲ \psi}{\partial t^۲}$$

$$Assume \ : \ \begin{cases} m(x) = m = Costant \quad , \quad J(x) = J = Constant \\ A(x) = A = Constant \quad , \quad I(x) = I = Constant \end{cases} \Longrightarrow$$

$$(۱) \quad KGA\left[\frac{\partial^۲ y}{\partial x^۲} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right] + P = m\frac{\partial^۲ y}{\partial t^۲}$$

$$(۲) \quad EI\frac{\partial^۲ \psi}{\partial x^۲} + KGA\frac{\partial y}{\partial x} - KGA\psi = J\frac{\partial^۲ \psi}{\partial t^۲}$$

اگرازمعادله (۲) نسبت به x مشتق گیری کنیم.

$$(۳) \quad \frac{\partial}{\partial x}(۲) = \qquad EI\frac{\partial^۳ \psi}{\partial x^۳} + KGA\frac{\partial^۲ y}{\partial x^۲} - KGA\frac{\partial \psi}{\partial x} = J\frac{\partial^۳ \psi}{\partial t^۲ \partial x}$$

بنابر این از معادله (۱) و (۳) داریم :

$$(\star) \quad KGA\frac{\partial^۲ y}{\partial x^۲} - KGA\frac{\partial \psi}{\partial x} = J\underbrace{\frac{\partial^۳ \psi}{\partial x \partial t^۲}}_{(I)} - EI\underbrace{\frac{\partial^۳ \psi}{\partial x^۳}}_{(II)}$$

معادله ما باید بر حسب y باشد . بنابر این باید (I) و (II) را به دست آوریم و جاگذاری کنیم .
اگر از معادله (۱) دو بار نسبت به x مشتق بگیریم (II) و اگر دو بار نسبت به t مشتق بگیریم (I) بدست خواهد آمد.

$$\text{(II)} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}(1) = \qquad KGA\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - KGA\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = m\frac{\partial^4 y}{\partial t^2 \partial x^2}$$

$$\text{(I)} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}(1) = \qquad KGA\frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} - KGA\frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = m\frac{\partial^4 y}{\partial t^4}$$

حال (I) و (II) را از روابط بالا در معادله $(\star)$ جاگذاری می کنیم .

$$(\star) \quad EI\left[\frac{1}{KGA}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \frac{m}{KGA}\frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial x^2}\right] + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - P =$$

$$J\left[\frac{1}{KGA}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{m}{KGA}\frac{\partial^4 y}{\partial t^4}\right]$$

اگر ساده کنیم و برای ارتعاشات آزاد $P(x,t) = 0, (Free\ Vibration)$ قرار دهیم :

$$(\star) \quad EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \frac{mEI}{KGA}\frac{\partial^4 y}{\partial t^2 \partial x^2} - J\frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{mJ}{KGA}\frac{\partial^4 y}{\partial t^4} + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

$$If \quad : y(x,t) = f(x)g(t) \Longrightarrow$$

$$EIg(t)f^4(x) - \frac{mEI}{KGA}f''(x)\ddot{g}(t) + Jf''(x)\ddot{g}(t) + \frac{mJ}{KGA}f(x)\ddot{\ddot{g}}(t) + mf(x)\ddot{g}(t) = 0$$

$$If \ : \quad g(t) = A\sin\omega t$$

$$\dot{g}(t) = A\omega\cos\omega t \ \ , \ \ \ddot{g}(t) = -A\omega^2\sin\omega t$$

$$\dot{\ddot{g}}(t) = -A\omega^3\cos\omega t \ \ , \ \ \ddot{\ddot{g}}(t) = A\omega^4\sin\omega t$$

اگر جاگذاری کنیم .

$$EIf^4 g + (\frac{mEI}{KGA} + J)\omega^2 f''g + (\frac{mJ}{KGA})\omega^4 fg - m\omega^2 fg = 0$$

با ساده کردن g از رابطه بالا و تقسیم رابطه به f داریم :

$$EI\frac{f^{۴}}{f}+(\frac{mEI}{KGA}+J)\omega^{۲}\frac{f''}{f}+m\omega^{۲}(\frac{\omega^{۲}J}{KGA}-۱)=۰$$

$$If \quad : \quad f(x)=e^{\lambda x}$$

$$f'(x)=\lambda e^{\lambda x} \quad , \quad f''(x)=\lambda^{۲}e^{\lambda x}$$

$$f^{۳}(x)=\lambda^{۳}e^{\lambda x} \quad , \quad f^{۴}(x)=\lambda^{۴}e^{\lambda x}$$

اگر جا گذاری کنیم و بر EI تقسیم کنیم .

$$\lambda^{۴}+(\underbrace{\frac{m}{KGA}}_{a}+\underbrace{\frac{J}{EI}}_{b})\omega^{۲}\lambda^{۲}+\omega^{۲}(\underbrace{\frac{mJ\omega^{۲}}{KGAEI}}_{ab\omega^{۲}}-\underbrace{\frac{m}{EI}}_{c})=۰$$

در این صورت :

$$\lambda^{۴}+(a+b)\omega^{۲}\lambda^{۲}+(ab\omega^{۲}-c)\omega^{۲}=۰$$

حال ریشه ها را بدست می آوریم .

$$\lambda_{۱}^{۲},\lambda_{۲}^{۲}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

در این صورت معادله ما ۴ ریشه دارد : $\lambda_{۱}$, $\lambda_{۲}$, $i\lambda_{۱}$, $i\lambda_{۲}$.
بنابر این تابع $f(x)$:

$$f(x)=C_{۱}\sin\lambda_{۱}x+C_{۲}\cos\lambda_{۲}x+C_{۳}\sinh\lambda_{۲}x+C_{۴}\cosh\lambda_{۲}x$$

شرایط مرزی را می نویسیم :
(۱) دو سر گیردار :

$$y(x,t)\mid_{x=۰}=۰ \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial x}\mid_{x=۰}=۰$$

$$y(x,t)\mid_{x=l}=۰ \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial x}\mid_{x=l}=۰$$

(۲)یک‌سرگیردار $(x=0)$ ویک‌سرآزاد $(x=l)$:

$$y(x,t)\,|_{x=0}=0 \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial x}\,|_{x=0}=0$$

$$M_T(x,t)\,|_{x=l}=EI\frac{\partial \psi}{\partial x}\,|_{x=l}=0 \quad ,Q \quad (x,t)\,|_{x=l}=KGA(\frac{\partial y}{\partial x}-\psi)\,|_{x=l}=0$$

بنابراین اگر یکی از شرایط مرزی بالا را انجام دهیم . ω_n, β_n, $f(x)$ بدست خواهند آمد.

وبقیه مراحل مانند مسائل قبل:

رسم شکل مُدهای طبیعی ارتعاش ϕ .

بررسی خاصیت اُرتوگونالیتی (تعامدی) $(Orthogonality)$ و نرمالایز $(Normalize)$ کردن مُدهای طبیعی ارتعاش.

درادامه معادله دیفرانسیل سیستم (تیر تیموشنکو)رااز روش همیلتون $(HamiltonMethod)$ به‌دست می آوریم:

انرژی جنبشی (T):

انرژی جنبشی (T) = انتقال (T_1) + دوران (T_2)

$$T=\frac{1}{2}m\dot{y}^2+\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \Longrightarrow$$

$$T=\frac{1}{2}\left[(\frac{\partial y}{\partial t})^2 m+(\frac{\partial \psi}{\partial t})^2 I\right] \Longrightarrow$$

$$dT=\frac{1}{2}\left[(\frac{\partial y}{\partial t})^2\right] dm+\left[(\frac{\partial \psi}{\partial t})^2\right] dI \Longrightarrow$$

$$T=\frac{1}{2}\int_0^l \left[(\frac{\partial y}{\partial t})^2 \underbrace{m(x)dx}_{dm}+(\frac{\partial \psi}{\partial t})^2 \underbrace{J(x)dx}_{dI}\right]$$

انرژی‌پتانسیل (U):

دوران β $(U_۲)$ +دوران ψ $(U_۱)$ =انرژی‌پتانسیل (U)

$$U = \frac{۱}{۲} \underbrace{K\theta}_{M_T = EI\frac{\partial\psi}{\partial x}} \underbrace{\theta}_{\psi} + \frac{۱}{۲} \underbrace{K\theta}_{Q.x} \underbrace{\theta}_{\beta} \Longrightarrow$$

$$dU = \frac{۱}{۲} EI \frac{\partial\psi}{\partial x} d\psi + \frac{۱}{۲} Q.dx\beta \Longrightarrow^{d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx}$$

$$U = \frac{۱}{۲} \int_{\circ}^{l} \left[EI \frac{\partial^۲\psi}{\partial x^۲} + Q\beta \right] dx$$

اگر $Q = KGA\beta$ راقراردهیم:

$$U = \frac{۱}{۲} \int_{\circ}^{l} \left[EI \frac{\partial^۲\psi}{\partial x^۲} + KGA(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi)^۲ \right] dx$$

کارانجام‌شده (W):

$$dW = P(x,t)ydx \Longrightarrow W = \int_{\circ}^{l} P(x,t)ydx$$

اگردرروش‌همیلتون ($HamiltonMethod$) قراردهیم:

$$\delta \int_{t_۱}^{t_۲} (T - U + W)dt = \circ$$

$$\delta \int_{t_۱}^{t_۲} [\ \frac{۱}{۲} \int_{\circ}^{l} m(x)(\frac{\partial y}{\partial t})^۲ dx + \frac{۱}{۲} \int_{\circ}^{l} J(x)(\frac{\partial \psi}{\partial t})^۲ dx - \frac{۱}{۲} \int_{\circ}^{l} EI(x)(\frac{\partial \psi}{\partial x})^۲ dx -$$

$$\frac{۱}{۲} \int_{\circ}^{l} KGA(x)(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi)^۲ dx + \int_{\circ}^{l} P(x,t)ydx\ ]\ dt = \circ \Longrightarrow$$

$$\int_{t_۱}^{t_۲} \int_{\circ}^{l} [\ \frac{۱}{۲} m(x)\delta(\frac{\partial y}{\partial t})^۲ dx + \frac{۱}{۲} J(x)\delta(\frac{\partial \psi}{\partial t})^۲ dx - \frac{۱}{۲} EI(x)\delta(\frac{\partial \psi}{\partial x})^۲ dx -$$

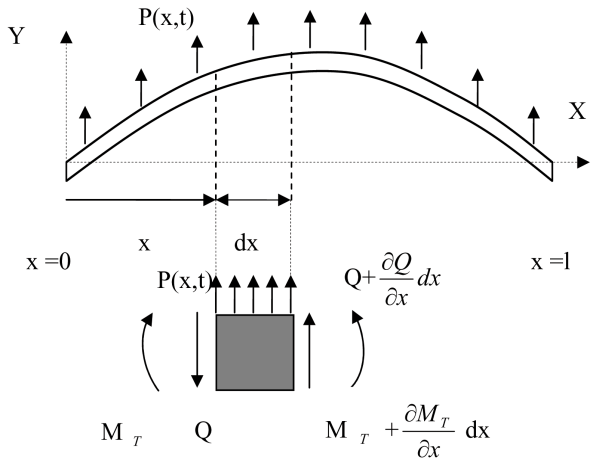
$$\frac{۱}{۲} KGA(x)\delta(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi)^۲ dx + P(x,t)\delta ydx\ ]\ dt = \circ$$

حال اگر انتگرال بالا را ۷ انتگرال تقسیم نموده و حل کنیم (به روش جزء به جزء $(PartToPart)$):

$$(\star)\quad EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}-\frac{mEI}{KGA}\frac{\partial^4 y}{\partial t^2\partial x^2}+J\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{mJ}{KGA}\frac{\partial^4 y}{\partial t^4}+m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0$$

---

۹ — ۲ — با استفاده از روش اویلر — برنولی معادله دیفرانسیل حرکت و فرکانسهای طبیعی تیر زیر را به دست آورید:



شکل(9-2-1)

در شکل والمان داده شده، زاویه چرخش و برش دیده نمی شود چون خط عمود بر ضلع المان بر خط افقی منطبق است. بنابراین از تغییر شکل برشی و اینرسی چرخشی صرف نظر می شود.

$m(x)$ =جرم بر واحد طول المان.

$I(x)$ =ممان اینرسی سطح.

$\frac{\partial y}{\partial x}=\psi+\beta=0$ =زاویه برش + زاویه چرخش. (اختلاف زاویه ای نداریم (منطبق هستند)).

$M_T=EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ =ممان خمشی.

براساس قانون دوم نیوتون $(SecondLawNewton)$:

$$\sum F_y = ma_y$$

$$-Q + Q + \frac{\partial Q}{\partial x}dx + P(x,t)dx = m(x)\frac{\partial^{۲} y}{\partial t^{۲}}dx$$

اگر ساده کنیم :

$$(۱) \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} + P(x,t) = m(x)\frac{\partial^{۲} y}{\partial t^{۲}}$$

از طرف دیگر :

$$\sum M = I\alpha$$

$$-M_T + M_T + \frac{\partial M_T}{\partial x}dx + Q\frac{dx}{۲} + (Q + \frac{\partial Q}{\partial x}dx)\frac{dx}{۲} + P(x,t)dx\frac{dx}{۲} = \underbrace{J(x)\frac{\partial^{۲}\psi}{\partial t^{۲}}dx}_{\frac{\partial y}{\partial x}=\psi+\beta=۰}$$

اگر ساده کنیم :

$$(۲) \qquad \frac{\partial M_T}{\partial x} + Q = ۰ \Longrightarrow \frac{\partial M_T}{\partial x} = -Q$$

اگر M_T را در معادله (۲) قرار دهیم Q بدست می آید سپس اگر Q را در معادله (۱) قرار دهیم داریم :

$$(۲) \qquad Q = -\frac{\partial}{\partial x}\left[EI\frac{\partial^{۲} y}{\partial x^{۲}}\right]$$

$$(\star) = (۲)\ In\ (۱) \qquad -\frac{\partial^{۲}}{\partial x^{۲}}\left[EI\frac{\partial^{۲} y}{\partial x^{۲}}\right] + P(x,t) = m(x)\frac{\partial^{۲} y}{\partial t^{۲}}$$

$$Assume\ :\ m(x) = m = Costant \quad , \quad I(x) = I = Constant \Longrightarrow$$

در این صورت معادله $(\star)$:

$$(\star) \qquad -EI(\frac{\partial^{۴} y}{\partial x^{۴}}) + P(x,t) = m\frac{\partial^{۲} y}{\partial t^{۲}}$$

برای ارتعاشات آزاد $(Free\ Vibration)$, $P(x,t) = ۰$:

$$(\star) \qquad -EI(\frac{\partial^{۴} y}{\partial x^{۴}}) = m\frac{\partial^{۲} y}{\partial t^{۲}}$$

$$If \quad : y(x,t) = f(x)g(t) \Longrightarrow$$

$$-EIg(t)f^{۴}(x) = mf(x)\ddot{g}(t) \Longrightarrow \frac{\ddot{g}(t)}{g(t)} = \frac{-EIf^{۴}(x)}{mf(x)} = -\omega^{۲} \Longrightarrow$$

در این صورت :

$$\frac{\ddot{g}(t)}{g(t)} = -\omega^{۲} \Longrightarrow g(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

$$\frac{-EIf^{۴}(x)}{mf(x)} = -\omega^{۲} \Longrightarrow \frac{f^{۴}(x)}{f(x)} = \frac{m\omega^{۲}}{EI} = \beta^{۴}$$

$$If \ : \quad f(t) = e^{\lambda x}$$

$$f'(x) = \lambda e^{\lambda x} \quad , \quad f''(x) = \lambda^{۲} e^{\lambda x}$$

$$f^{۳}(x) = \lambda^{۳} e^{\lambda x} \quad , \quad f^{۴}(x) = \lambda^{۴} e^{\lambda x}$$

حال اگر در رابطه بالا قرار دهیم :

$$\frac{f^{۴}(x)}{f(x)} = \frac{m\omega^{۲}}{EI} = \frac{\lambda^{۴} e^{\lambda x}}{e^{\lambda x}} = \beta^{۴} \Longrightarrow \lambda^{۴} = \beta^{۴}$$

بنابر این می توان گفت که ریشه های تابع $\beta \ , \ -\beta \ , \ i\beta \ , \ -i\beta$.
پس :

$$f(x) = C_{۱}\sin\beta x + C_{۲}\cos\beta x + C_{۳}\sinh\beta x + C_{۴}\cosh\beta x$$

شرایط مرزی را می نویسیم :
(۱) دو سر گیردار :

$$y(x,t)\,|_{x=۰} = ۰ \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial x}\,|_{x=۰} = ۰$$

$$y(x,t)\,|_{x=l} = ۰ \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial x}\,|_{x=l} = ۰$$

(۲) یک سر گیردار $(x=0)$ و یک سر آزاد $(x=l)$:

$$y(x,t)\mid_{x=0}=0 \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial x}\mid_{x=0}=0$$

$$M_T(x,t)\mid_{x=l}=EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\mid_{x=l}=0 \quad , \quad Q(x,t)\mid_{x=l}=-EI(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3})\mid_{x=l}=0$$

اگر یک سر گیردار $(x=0)$ و یک سر آزاد $(x=l)$:

$$y(x,t)\mid_{x=0}=0 \Longrightarrow f(x)\mid_{x=0}=0 \Longrightarrow C_2+C_4=0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}\mid_{x=0}=0 \Longrightarrow C_1\beta+C_3\beta=0 \Longrightarrow \beta(C_1+C_3)=0 \Longrightarrow^{\beta\neq 0}$$

$$C_1+C_3=0$$

$$M_T(x,t)\mid_{x=l}=EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\mid_{x=l}=0 \Longrightarrow$$

$$-C_1\beta^2\sin\beta l-C_2\beta^2\cos\beta l-C_3\beta^2\sinh\beta l-C_4\beta^2\cosh\beta l=0$$

$$Q(x,t)\mid_{x=l}=-EI(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3})\mid_{x=l}=0 \Longrightarrow$$

$$-C_1\beta^3\cos\beta l+C_2\beta^3\sin\beta l-C_3\beta^3\cosh\beta l+C_4\beta^3\sinh\beta l=0$$

از طرف دیگرمی دانیم :

اگر تیر قرینه باشد و مبداء مختصات در وسط آن قرار داشته باشد $(\sinh z\ ,\ \cosh z\ ,\ \sin z)$ همگی مساوی صفر خواهند بود .(معادله تیر کسینوسی می شود.)

حال اگر مبداء مختصات را $-\frac{l}{2}$ بر روی محور x جابجا کنیم در این صورت $(\sinh z\ ,\ \cosh z\ ,\ \cos z)$ همگی مساوی صفر خواهند شد.(معادله تیر سینوسی می شود.)

بنابر این $f_n(x)$:

$$f_n(x)=C_1\sin\beta_n x$$

$$\beta_n l=n\pi \Longrightarrow \beta_n=\frac{n\pi}{l}$$

$$\beta_n^۴ = \frac{m\omega_n^۲}{EI} = \frac{n^۴\pi^۴}{l^۴} \Longrightarrow \omega_n = \frac{n^۲\pi^۲}{l^۲}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

نرمالایز کردن مُد هاوخاصیت اُرتوگونالیتی$(Orthogonality\ and\ Normalization)$:

تابع وزنی $m(x)$ می باشد .

$$\int_۰^l f_n(x)f_m(x)m(x)dx = ۱ \qquad\qquad If\ \ :\ m = n$$

$$\int_۰^l f_n^۲(x)m(x)dx = mC_n^۲\int_۰^l \sin^۲\beta_n x dx = mC_n^۲\int_۰^l \frac{۱-\cos ۲\beta_n x}{۲}dx =$$

$$\frac{mC_n^۲}{۲}\int_۰^l (۱-\cos ۲\beta_n x)dx = \frac{mC_n^۲}{۲}\left[l - \frac{\sin ۲\beta_n l}{۲\beta_n}\right] = ۱ \Longrightarrow$$

$$mC_n^۲\frac{l}{۲} = ۱ \Longrightarrow C_n = \sqrt{\frac{۲}{ml}}$$

در این صورت :

$$f_n^{(N)}(x) = \sqrt{\frac{۲}{ml}}\sin\beta_n x\ ,\ \omega_{\ n} = \frac{n^۲\pi^۲}{l^۲}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

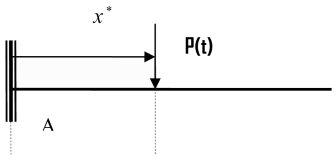
اگر وارد ارتعاش اجباری شویم یعنی : $P(x,t) \neq ۰$

معادله ارتعاشی :

$$(\star) \qquad -EI(\frac{\partial^۴ y}{\partial x^۴}) + P(x,t) = m\frac{\partial^۲ y}{\partial t^۲} \Longrightarrow$$

$$(\star) \qquad EI(\frac{\partial^۴ y}{\partial x^۴}) + m\frac{\partial^۲ y}{\partial t^۲} = P(x,t)$$

اگر در موقعیت $x = x^\star$ یک نیرو بر تیر وارد کنیم .



چون حالت یک بعدی است :

x=0 x=l

شکل(2-2-9)

$$P(x,t) = P(t)\delta(x - x^\star)$$

اگر ورق بود حالت دو بعدی می شد: $P(x,y,t) = P(t)\delta(x - x^\star)\delta(y - y^\star)$

اگر استوانه بود حالت سه بعدی می شد: $P(x,y,z,t) = P(t)\delta(x-x^\star)\delta(y-y^\star)\delta(z-z^\star)$

در این صورت :

$$(\star) \qquad EI(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}) + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = P(t)\delta(x - x^\star)$$

$$\begin{cases} \delta(x - x^\star) = 1 & x = x^\star \\ \delta(x - x^\star) = 0 & x \neq x^\star \end{cases}$$

$$If \quad : \quad y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(N)}(x)\eta_n(t)$$

اگر جاگذاری کنیم :

$$EI\frac{\partial^4}{\partial x^4}\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(N)}(x)\eta_n(t)\right] + m\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(N)}(x)\eta_n(t)\right] = P(t)\delta(x - x^\star) \Longrightarrow$$

$$EI\sum_{n=1}^{\infty} {f_n^{(N)}}^{4}(x)\eta_n(t) + m\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(N)}(x)\ddot{\eta}_n(t) = P(t)\delta(x - x^\star)$$

یاد آوری :

در $(Free\ Vibration)$ داشتیم :

$$\frac{f^4(x)}{f(x)} = \frac{m\omega^2}{EI} = \beta_n^4 \Longrightarrow \frac{{f_n^{(N)}}^{4}(x)}{f_n^{(N)}(x)} = \beta_n^4$$

جاگذاری :

$$EI\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^4 f_n^{(N)}(x)\eta_n(t) + m\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(N)}(x)\ddot{\eta}_n(t) = P(t)\delta(x - x^\star)$$

خاصیت اُرتوگونالیتی$(Orthogonality\ and\ Normalization)$:

حاصل را در $f_m^{(N)}(x)$ ضرب می کنیم :

$$EI\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^4 f_n^{(N)}(x) f_m^{(N)}(x)\eta_n(t) + m\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(N)}(x) f_m^{(N)}(x)\ddot{\eta}_n(t) = P(t) f_m^{(N)}(x)\delta(x-x^\star)$$

اگر انتگرال گیری کنیم :

$$EI\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^4\eta_n(t)\underbrace{\int_0^l f_n^{(N)}(x)f_m^{(N)}(x)dx}_{\delta_{mn}}+m\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{\eta_n}(t)\underbrace{\int_0^l f_n^{(N)}(x)f_m^{(N)}(x)dx}_{\delta_{mn}}=$$

$$P(t)\int_0^l f_m^{(N)}(x)\delta(x-x^\star)dx$$

$$\int_0^l f_n^{(N)}(x)f_m^{(N)}(x)dx=1 \qquad If \quad : \quad m=n$$

در این صورت :

$$EI\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^4\eta_n(t)+m\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{\eta_n}(t)=P(t)f_n^{(N)}(x^\star)\Longrightarrow$$

$$EI\beta_n^4\eta_n(t)+m\ddot{\eta_n}(t)=P(t)f_n^{(N)}(x^\star)\Longrightarrow$$

$$\ddot{\eta_n}(t)+\frac{EI}{m}\beta_n^4\eta_n(t)=\frac{P(t)}{m}f_n^{(N)}(x^\star)\Longrightarrow$$

$$\ddot{\eta_n}(t)+\omega_n^2\eta_n(t)=\frac{P(t)}{m}f_n^{(N)}(x^\star)$$

برای حل این معادله باید لاپلاس گیری کنیم :

$$\mathrm{L}\ \ \ddot{\eta_n}(t)+\omega_n^2\mathrm{L}\ \ \eta_n(t)=\frac{f_n^{(N)}(x^\star)}{m}\mathrm{L}\ \ P(t)$$

$$\mathrm{L}\ \ \eta_n(t)=\eta_n(0)\mathrm{L}\ \ \cos\omega_n t+\frac{\dot{\eta}_n(0)}{\omega_n}\mathrm{L}\ \ \sin\omega_n t+\frac{f_n^{(N)}(x^\star)}{m}\mathrm{L}\ \ P(t)\mathrm{L}\ \ \sin\omega_n t$$

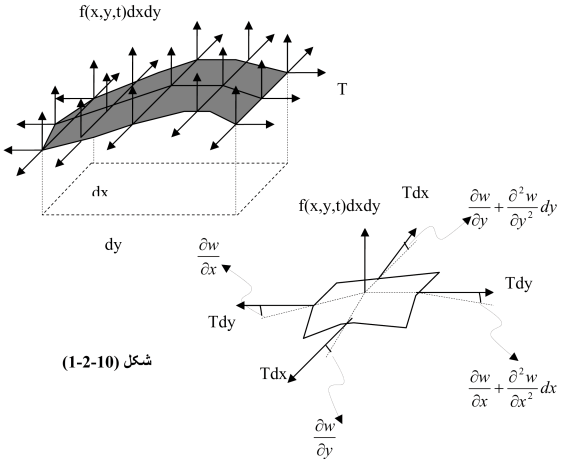
و در آخر :

$$\eta_n(t)=\frac{f_n^{(N)}(x^\star)}{\omega_n}\int_0^l P(\phi)\sin\omega_n(t-\phi)d\phi+\eta_n(0)\cos\omega_n+\frac{\dot{\eta}_n(0)}{\omega_n t}\sin\omega_n t$$

ارتعاشات پوسته‌ها ($VibrationOfShells$) :

ساده‌ترین سیستم ارتعاشی در فضای دو بعدی , پوسته‌ها هستند.
در مسائل دو بعدی چندین دستگاه مختصات برای توصیف حرکت یک جسم وجود دارد.
مثل: دستگاه مستطیلی (کارتزین) , قطبی , بیضوی و...
انتخاب دستگاه بستگی به شکل مرزها دارد. طبیعی است که اگر مرزهای ما مستطیل باشد , دستگاه مستطیلی (کارتزین) و اگر دایره ای باشد مختصات قطبی , و اگر بیضوی باشد مختصات بیضوی , مناسب‌ترین مختصات خواهد بود.

۱۰ — ۲ — بررسی ارتعاشات یک پوسته مستطیل ($SquareShell$) شکل که بار گسترده $f(x,y,t)$ روی آن قرار دارد.
معادله دیفرانسیل حرکت و فرکانسهای ارتعاش را بدست آورید:



شکل (1-2-10)

ρ جرم بر واحد سطح $(dxdy)$ المنت است.
براساس قانون دوم نیوتون ($SecondLawNewton$) :

$$-Tdy\frac{\partial w}{\partial x}+Tdy(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx)+Tdx(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}dy)-Tdx\frac{\partial w}{\partial y}+f(x,y,t)dxdy=$$

$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}dxdy$$

اگر ساده کنیم:

$$Tdy\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx+Tdx\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}dy+f(x,y,t)dxdy=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}dxdy \Longrightarrow$$

$$T(\underbrace{\frac{\partial^{۲} w}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial^{۲} w}{\partial y^{۲}}}_{\nabla^{۲} w})+f(x,y,t)=\rho\frac{\partial^{۲} w}{\partial t^{۲}}$$

پس داریم :

$$T\nabla^{۲} w+f(x,y,t)=\rho\frac{\partial^{۲} w}{\partial t^{۲}}$$

در ارتعاشات آزاد $(Free\ Vibration)$ $f(x,y,t)=۰$:

$$T\nabla^{۲} w=\rho\frac{\partial^{۲} w}{\partial t^{۲}}$$

$$If \quad : \quad w(x,y,t)=w^{\star}(x,y)g(t)=X(x)Y(y)g(t)$$

$$TY(y)g(t)X''(x)+TX(x)g(t)Y''(y)=\rho X(x)Y(y)\ddot{g}(t)\Longrightarrow$$

$$g(t)T\left[Y(y)X''(x)+X(x)Y''(y)\right]=\rho X(x)Y(y)\ddot{g}(t)\Longrightarrow$$

$$\frac{\ddot{g}}{g}=\frac{T\left[Y(y)X''(x)+X(x)Y''(y)\right]}{\rho X(x)Y(y)}=-\omega^{۲}$$

$$\frac{\ddot{g}}{g}=-\omega^{۲}\Longrightarrow g(t)=K\sin\omega t+G\cos\omega t$$

$$\frac{T\left[Y(y)X''(x)+X(x)Y''(y)\right]}{\rho X(x)Y(y)}=-\omega^{۲}\Longrightarrow$$

$$\left[\frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}\right]=\frac{-\omega^{۲}\rho}{T}=-\beta^{۲}\Longrightarrow$$

$$\frac{X''}{X}+\beta^{۲}=-\frac{Y''}{Y}=\gamma^{۲} \quad , \quad \frac{Y''}{Y}+\beta^{۲}=-\frac{X''}{X}=\alpha^{۲}$$

در این صورت :

$$Y(y)=A\sin\gamma y+B\cos\gamma y \qquad , \qquad X(x)=C\sin\alpha x+D\cos\alpha x$$

پس داریم :

$$w(x,y,t) = w^{\star}(x,y)g(t) = X(x)Y(y)g(t) \Longrightarrow$$

$$w(x,y,t) = (C\sin\alpha x + D\cos\alpha x)(A\sin\gamma y + B\cos\gamma y)(K\sin\omega t + G\cos\omega t)$$

$$w^{\star}(x,y) = (C\sin\alpha x + D\cos\alpha x)(A\sin\gamma y + B\cos\gamma y) =$$

$$\underbrace{CA}_{C_1}(\sin\alpha x\sin\gamma y) + \underbrace{CB}_{C_2}(\sin\alpha x\cos\gamma y) + \underbrace{DA}_{C_3}(\cos\alpha x\sin\gamma y) + \underbrace{DB}_{C_4}(\cos\alpha x\cos\gamma y)$$

در این صورت :

$$w^{\star}(x,y) = C_1(\sin\alpha x\sin\gamma y) + C_2(\sin\alpha x\cos\gamma y) + C_3(\cos\alpha x\sin\gamma y) + C_4(\cos\alpha x\cos\gamma y)$$

$$w^{\star}(x,y) = (C_1\sin\gamma y + C_2\cos\gamma y)\sin\alpha x + (C_3\sin\gamma y + C_4\cos\gamma y)\cos\alpha x$$

شرایط مرزی را می نویسیم :

(۱) از چهار جهت گیردار :

ضلع روی محور x از $x = 0$ تا $x = a$ و ضلع روی محور y از $y = 0$ تا $y = b$ می باشد.

$$w^{\star}(x,y)\mid_{x=0} = 0 \qquad , \qquad w^{\star}(x,y)\mid_{x=a} = 0$$

$$w^{\star}(x,y)\mid_{y=0} = 0 \qquad , \qquad w^{\star}(x,y)\mid_{y=b} = 0$$

$$w^{\star}(x,y)\mid_{y=0} = 0 \Longrightarrow C_3\sin\gamma y + C_4\cos\gamma y = 0 \Longrightarrow C_3 = C_4 = 0$$

در این صورت :

$$w^{\star}(x,y) = (C_1\sin\gamma y + C_2\cos\gamma y)\sin\alpha x$$

$$w^\star(x,y)\mid_{x=a}=\circ \Longrightarrow (C_۱\sin\gamma y + C_۲\cos\gamma y)\sin\alpha a=\circ \Longrightarrow \sin\alpha a=\circ \Longrightarrow$$

$$\alpha=\frac{m\pi}{a} \quad , \quad m=\circ,۱,۲,...$$

$$w^\star(x,y)\mid_{y=\circ}=\circ \Longrightarrow C_۲\sin\alpha x=\circ \Longrightarrow C_۲=\circ$$

در این صورت :

$$w^\star(x,y)=C_۱\sin\gamma y\sin\alpha x$$

$$w^\star(x,y)\mid_{y=b}=\circ \Longrightarrow C_۱\sin\gamma b\sin\alpha x=\circ \Longrightarrow \sin\gamma b=\circ \Longrightarrow \gamma b=n\pi \Longrightarrow$$

$$\gamma=\frac{n\pi}{b} \quad , \quad n=\circ,۱,۲,...$$

بنابر این :

$$w^\star(x,y)_{mn}=C_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$$

با توجه به اینکه α و β مشخص شده اند :

$$\beta^۲=\alpha^۲+\gamma^۲ \Longrightarrow \beta_{mn}^۲=\frac{m^۲\pi^۲}{a^۲}+\frac{n^۲\pi^۲}{b^۲}$$

$$\frac{\omega_{mn}^۲\rho}{T}=\beta_{mn}^۲ \Longrightarrow \omega_{mn}=(\frac{m\pi}{a}+\frac{n\pi}{b})\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

در ادامه به صورت عددی $(Numerical)$:

رسم شکل مُدهای طبیعی ارتعاش ϕ .

بررسی خاصیت اُرتوگونالیتی $(Orthogonality)$ و نرمالایز $(Normalize)$ کردن مُدهای طبیعی ارتعاش .

---

۱۱ — ۲— پوسته دایره ای $(Circular\ Shell)$ یکنواختی داریم که در ناحیه D قرار دارد و $0 < r < a$ می باشد. مرز دامنه , دایره S است . که توسط معادله $r = a$ داده شده است .

با بکار بردن مختصات قطبی (r, θ) , معادله دیفرانسیل را بدست آورید:

با توجه به معادله پوسته در مختصات کارتزین (مستطیلی):

$$T(\underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}_{\nabla^2 w}) + f(x, y, t) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Longrightarrow$$

$$T(\nabla^2 w) + f(x, y, t) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

در مختصات قطبی : نیروهای کششی دور تا دور آن قرار دارند.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

اگر در معادله بالا قرار دهیم :

$$T(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}) + f(x, y, t) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Longrightarrow$$

$$(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}) + \frac{f(x, y, t)}{T} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

به روش تحلیلی :

$$w(r, \theta, t) = w^\star(r, \theta) g(t)$$

در این صورت :

$$\frac{\partial^2 w^\star}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w^\star}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w^\star}{\partial \theta^2} = \frac{\rho}{T} w^\star \frac{\ddot{g}}{g}$$

$$If \quad : \quad \frac{\ddot{g}}{g} = -\omega^2 \Longrightarrow -\frac{\rho\omega^2}{T} w^\star = -\beta^2 w^\star$$

در این صورت : $\beta^2 = \frac{\rho\omega^2}{T}$

پس معادله دیفرانسیل پوسته دایره‌ای :

$$w^\star_{,rr} + \frac{1}{r} w^\star_{,r} + \frac{1}{r^2} w^\star_{,\theta\theta} = -\beta^2 w^\star$$

$$If \quad : \quad w^{\star}(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

اگرجاگذاری کنیم:

$$\nabla^{۲} w(r,\theta) = \frac{\partial^{۲} w(r,\theta)}{\partial r^{۲}} + \frac{۱}{r}\frac{\partial w(r,\theta)}{\partial r} + \frac{۱}{r^{۲}}\frac{\partial^{۲} w(r,\theta)}{\partial \theta^{۲}} \Longrightarrow$$

$$\Theta(\theta)\frac{d^{۲}R(r)}{dr^{۲}} + \frac{۱}{r}\Theta(\theta)\frac{dR(r)}{dr} + \frac{۱}{r^{۲}}R(r)\frac{d^{۲}\Theta(\theta)}{d\theta^{۲}} + \beta^{۲}(R(r)\Theta(\theta)) = ۰ \Longrightarrow$$

$$\Theta(\theta)\left[\frac{d^{۲}R}{dr^{۲}} + \frac{۱}{r}\frac{dR}{dr}\right] + \frac{R}{r^{۲}}\frac{d^{۲}\Theta}{d\theta^{۲}} + \beta^{۲}(R(r)\Theta(\theta)) = ۰$$

اگرمعادله‌بالا رادر $\frac{r^{۲}}{R(r)\Theta(\theta)}$ ضرب‌کنیم:

$$\frac{r^{۲}}{R(r)}\left[\frac{d^{۲}R}{dr^{۲}} + \frac{۱}{r}\frac{dR}{dr}\right] + \frac{۱}{\Theta}\frac{d^{۲}\Theta}{d\theta^{۲}} + r^{۲}\beta^{۲} = ۰$$

دراین‌صورت:

$$\frac{r^{۲}}{R(r)}\left[\frac{d^{۲}R}{dr^{۲}} + \frac{۱}{r}\frac{dR}{dr}\right] + r^{۲}\beta^{۲} = -\frac{۱}{\Theta}\frac{d^{۲}\Theta}{d\theta^{۲}} = m^{۲} \Longrightarrow$$

$$-\frac{۱}{\Theta}\frac{d^{۲}\Theta}{d\theta^{۲}} = m^{۲} \Longrightarrow \frac{d^{۲}\Theta}{d\theta^{۲}} + m\Theta = ۰ \Longrightarrow$$

$$\frac{\ddot{\Theta}}{\Theta} = -m^{۲} \Longrightarrow \Theta(\theta) = C_{۱}\sin m\theta + C_{۲}\cos m\theta$$

پ س :

$$\Theta_m(\theta) = C_{۱m}\sin m\theta + C_{۲m}\cos m\theta, m \qquad = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

برای‌طرف‌دیگرتساوی:

$$\frac{r^{۲}}{R(r)}\left[\frac{d^{۲}R}{dr^{۲}} + \frac{۱}{r}\frac{dR}{dr}\right] + r^{۲}\beta^{۲} = m^{۲}$$

اگردر $\frac{R}{r^{۲}}$ ضرب‌کنیم:

$$\left[\frac{d^{۲}R}{dr^{۲}} + \frac{۱}{r}\frac{dR}{dr}\right] + \frac{R}{r^{۲}}(r^{۲}\beta^{۲} - m^{۲}) = ۰ \Longrightarrow$$

$$\left[\frac{d^{۲}R}{dr^{۲}}+\frac{۱}{r}\frac{dR}{dr}\right]+R\beta^{۲}-\frac{m^{۲}R}{r^{۲}}=۰$$

طبق معادله بسل :

$$R_m(r)=C_{۳m}J_m(\beta r)+C_{۴m}Y_m(\beta r) \quad , \; m=۰,۱,۲,...$$

که $J_m(\beta r)$ و $Y_m(\beta r)$ توابع بسل مرتبه m از نوع اول و دوم هستند .
حل معادله بالا :

$$w_m(r,\theta)=A_{۱m}J_m(\beta r)\sin m\theta+A_{۲m}J_m(\beta r)\cos m\theta+$$

$$A_{۳m}Y_m(\beta r)\sin m\theta+A_{۴m}Y_m(\beta r)\cos m\theta$$

که : $m=۰,۱,۲,...$
حال فرض کنیم که پوسته در $r=a$ گیردار باشد : بنابر این شرط مرزی برابر است با:

$$w_m(r,\theta)=۰ \qquad , \quad m=۰,۱,۲,...$$

در هر نقطه داخلی پوسته جابجایی باید محدود باشد. اما توابع بسل نوع دوم تمایل دارند در بینهایت به صفر برسند.

$$A_{۳m}=A_{۴m}=۰$$

$$w_m(r,\theta)=A_{۱m}J_m(\beta r)\sin m\theta+A_{۲m}J_m(\beta r)\cos m\theta \qquad , \quad m=۰,۱,۲,...$$

طبق شرط مرزی :

$$w_m(a,\theta)=A_{۱m}J_m(\beta a)\sin m\theta+A_{۲m}J_m(\beta a)\cos m\theta=۰ \qquad , \quad m=۰,۱,۲,...$$

چون این رابطه به ازاء جمع مقادیر θ بر قرار است :

$$J_m(\beta a)=۰ \qquad , \quad m=۰,۱,۲,...$$

معادله بالا مجموعه ای از معادلات مشخصه , یا معادلات فرکانسی را مشخص می کند .
به ازا هر m
.

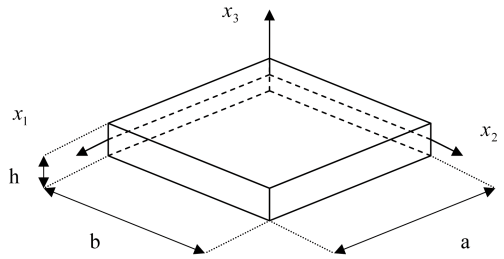
ارتعاشات ورقها ($VibrationOfPlates$) :

ورقها به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱—ورقهای نازک ($ThinPlates$)

۲—ورقهای ضخیم ($ThickPlates$)

ورقهای نازک و ضخیم بنابر قضیه ($Kirchhoff$) :



شکل(1-2-12)

$$\begin{cases} \epsilon_z = 0 \Longrightarrow \psi_3 = \psi_3(x_1, x_2, t)\text{ThinplateIf} & \frac{h}{a} < \frac{1}{20} \\ \epsilon_z \neq 0 \Longrightarrow \psi_3 = \psi_3(x_1, x_2, x_3, t)\text{ThickPlateIf} & \frac{h}{a} > \frac{1}{20} \end{cases}$$

در اینجا به بررسی ورقهای نازک ($ThinPlates$) می‌پردازیم:

فرضیات ورقهای نازک ($ThinPlates$) :

۱—صفحه میانی ورق فاقد جابجایی در راستای x_1 , x_2 می‌باشد.

$$u_1|_{x_3=0}, u_2|_{x_3=0} = 0$$

۲ — مقاطع مسطح اولیه بعد از تغییر شکل مسطح باقی می مانند (دارای شیب یکسان هستند).

۳—مولفه بردار جابجایی در امتداد محور x_3 تابع مختصات x_3 نیست.

$$u_3 = \psi_3(x_1, x_2, t)$$

برای اثبات بهتر فرضیات بالا:

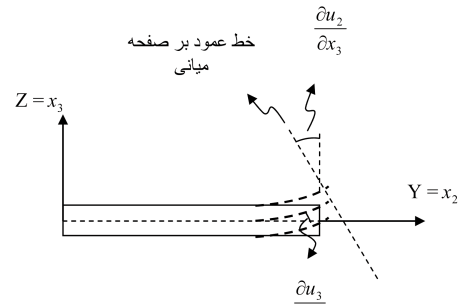
$$ForThinPlate \quad : \sigma_z = \sigma_3 = C = Constant$$

در حالی که u_1, u_2 به $z = x_3$ وابسته نیست . و به علت تغییر شکل کم $u_z = u_3 = 0$ می‌باشد.
بنابر ($PlaneStrain$) :

$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \Longrightarrow \epsilon_{zz} = 0 \Longrightarrow$$

$$\epsilon_{33} = 0$$

اگر به شکل دو بعدی زیر توجه کنیم:



شکل (2-2-12)

تغییرات u_2 به x_3 می بایست به صورت خطی باشد و همچنین اگر از سمت دیگر نسبت به محور x شکل را بکشیم در آن صورت تغییرات u_1 به x_3 نیز خطی می‌باشد.
در این حالت اگر صفحه نازک باشد ($ThinPlate$) :

$$\left| \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right| = \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right|$$

پس چون $\frac{\partial u_3}{\partial x_2}$:شیب در همه نقاط $x_3 = z$ از $[-\frac{h}{2} \ , \ 0] \ , \ [0 \ , \ \frac{h}{2}]$ ثابت است پس u_3 نباید تابعی از x_3 باشد.
بنابراین اگر:

$$u_3 = \psi_3(x_1, x_2, t)$$

که تابعی از $x_3 = z$ نیست.

$$u_1 = -x_3 \frac{\partial \psi_3(x_1, x_2, t)}{\partial x_1}$$

$$u_2 = -x_3 \frac{\partial \psi_3(x_1, x_2, t)}{\partial x_2}$$

۱۲—۲— بررسی ارتعاشات یک ورق نازک $(Thin\ Plate)$ مستطیل شکل .
معادله دیفرانسیل حرکت و فرکانسهای ارتعاش را بدست آورید:

با توجه به‌جابجایی های $u_۳$, $u_۲$, $u_۱$:

$$u_۱ = -x_۳ \frac{\partial \psi_۳(x_۱, x_۲, t)}{\partial x_۱}$$

$$u_۲ = -x_۳ \frac{\partial \psi_۳(x_۱, x_۲, t)}{\partial x_۲}$$

$$u_۳ = \psi_۳(x_۱, x_۲, t)$$

اگر رابطه جابجایی و کرنش را بنویسیم و کرنشها را بدست آوریم :

$$\epsilon_{ij} = \frac{۱}{۲}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$$

در این صورت :

$$\epsilon_{۱۱} = -x_۳ \frac{\partial^۲ \psi_۳}{\partial x_۱^۲} \quad , \quad \epsilon_{۱۲} = -x_۳ \frac{\partial^۲ \psi_۳}{\partial x_۱ \partial x_۲} \quad , \quad \epsilon_{۱۳} = ۰$$

$$\epsilon_{۲۱} = -x_۳ \frac{\partial^۲ \psi_۳}{\partial x_۱ \partial x_۲} \quad , \quad \epsilon_{۲۲} = -x_۳ \frac{\partial^۲ \psi_۳}{\partial x_۲^۲} \quad , \quad \epsilon_{۲۳} = ۰$$

$$\epsilon_{۳۱} = ۰ \quad , \quad \epsilon_{۳۲} = ۰ \quad , \quad \epsilon_{۳۳} = ۰$$

همانطور که می دانیم :

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + ۲\mu \epsilon_{ij}$$

پس می توان تنش ها را بر اساس کرنش ها بدست آورد.

$$\sigma_{۱۱} = \frac{E}{۱ - \nu^۲}(\epsilon_{۱۱} + \nu \epsilon_{۲۲}) = -\frac{E x_۳}{۱ - \nu^۲}(\frac{\partial^۲ \psi_۳}{\partial x_۲^۲} + \nu \frac{\partial^۲ \psi_۳}{\partial x_۱^۲})$$

$$\sigma_{۲۲} = \frac{E}{۱ - \nu^۲}(\epsilon_{۲۲} + \nu \epsilon_{۱۱}) = -\frac{E x_۳}{۱ - \nu^۲}(\frac{\partial^۲ \psi_۳}{\partial x_۱^۲} + \nu \frac{\partial^۲ \psi_۳}{\partial x_۲^۲})$$

$$\sigma_{۱۲} = \frac{E}{۱ + \nu} \epsilon_{۱۲} = -\frac{E x_۳}{۱ + \nu}(\frac{\partial^۲ \psi_۳}{\partial x_۱ \partial x_۲})$$

حال بر اساس معادله ناویر در غیاب نیروهای جسمی :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \underbrace{f_i}_{=0} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

داریم :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

اگر به صورت کلی بنویسیم :

$$\begin{cases} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} = \rho \ddot{u}_1 \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} = \rho \ddot{u}_2 \\ \sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} = \rho \ddot{u}_3 \end{cases}$$

اگر معادله اول و دوم را در $x_3 dx_3$ ضرب کنیم و نیز معادله سوم را در dx_3 خواهیم داشت :

$$(1) \qquad \sigma_{11,1} x_3 dx_3 + \sigma_{12,2} x_3 dx_3 + \sigma_{13,3} x_3 dx_3 = \rho \ddot{u}_1 x_3 dx_3$$

$$(2) \qquad \sigma_{21,1} x_3 dx_3 + \sigma_{22,2} x_3 dx_3 + \sigma_{23,3} x_3 dx_3 = \rho \ddot{u}_2 x_3 dx_3$$

$$(3) \qquad \sigma_{31,1} dx_3 + \sigma_{32,2} dx_3 + \sigma_{33,3} dx_3 = \rho \ddot{u}_3 dx_3$$

حال اگر انتگرال گیری کنیم :

$$(1) \ \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11} x_3 dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{12} x_3 dx_3 + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} x_3 dx_3 =$$

$$\rho \ddot{u}_1 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 dx_3$$

$$(2) \ \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{21} x_3 dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{22} x_3 dx_3 + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} x_3 dx_3 =$$

$$\rho \ddot{u}_2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 dx_3$$

$$(۳)\ \frac{\partial}{\partial x_۱}\int_{-\frac{h}{۲}}^{\frac{h}{۲}}\sigma_{۳۱}dx_۳+\frac{\partial}{\partial x_۲}\int_{-\frac{h}{۲}}^{\frac{h}{۲}}\sigma_{۳۲}dx_۳+\int_{-\frac{h}{۲}}^{\frac{h}{۲}}\frac{\partial\sigma_{۳۳}}{\partial x_۳}dx_۳=$$

$$\rho\ddot{u}_۳\int_{-\frac{h}{۲}}^{\frac{h}{۲}}dx_۳$$

دراین صورت انتگرالهای انتهایی معادلات بالا به صورت زیر حل خواهد شد.

$$(۱)\qquad \int_{-\frac{h}{۲}}^{\frac{h}{۲}}\frac{\partial\sigma_{۱۳}}{\partial x_۳}x_۳dx_۳=$$

حل انتگرال به روش جزء به جزء $(Part\,to\,Part)$:

$$\begin{cases} x_۳=u\Longrightarrow dx_۳=du \\ \frac{\partial\sigma_{۱۳}}{\partial x_۳}dx_۳=dv\Longrightarrow\sigma_{۱۳}=v \end{cases}$$

$$\int_{-\frac{h}{۲}}^{\frac{h}{۲}}\frac{\partial\sigma_{۱۳}}{\partial x_۳}x_۳dx_۳=\underbrace{x_۳\sigma_{۱۳}\mid_{-\frac{h}{۲}}^{\frac{h}{۲}}}_{=۰}-\int_{-\frac{h}{۲}}^{\frac{h}{۲}}\sigma_{۱۳}dx_۳$$

$$(۲)\qquad \int_{-\frac{h}{۲}}^{\frac{h}{۲}}\frac{\partial\sigma_{۲۳}}{\partial x_۳}x_۳dx_۳=$$

حل انتگرال به روش جزء به جزء $(Part\,to\,Part)$:

$$\begin{cases} x_۳=u\Longrightarrow dx_۳=du \\ \frac{\partial\sigma_{۲۳}}{\partial x_۳}dx_۳=dv\Longrightarrow\sigma_{۲۳}=v \end{cases}$$

$$\int_{-\frac{h}{۲}}^{\frac{h}{۲}}\frac{\partial\sigma_{۲۳}}{\partial x_۳}x_۳dx_۳=\underbrace{x_۳\sigma_{۲۳}\mid_{-\frac{h}{۲}}^{\frac{h}{۲}}}_{=۰}-\int_{-\frac{h}{۲}}^{\frac{h}{۲}}\sigma_{۲۳}dx_۳$$

$$(۳)\qquad \int_{-\frac{h}{۲}}^{\frac{h}{۲}}\frac{\partial\sigma_{۳۳}}{\partial x_۳}dx_۳=\sigma_{۳۳}\mid_{-\frac{h}{۲}}^{\frac{h}{۲}}$$

بنابراین برآیند انتگرالهای بالا (ممان خمشی M_{11}, M_{22}) و (ممان پیچشی M_{12}, M_{21}) و (نیروی برشی V_1, V_2) به‌صورت زیر بدست خواهند آمد.

پس می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}M_{11} + \frac{\partial}{\partial x_2}M_{12} + V_1 = -\frac{\rho h^3}{12}\ddot{\psi}_{3,1} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}M_{21} + \frac{\partial}{\partial x_2}M_{22} + V_2 = -\frac{\rho h^3}{12}\ddot{\psi}_{3,2} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}V_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}V_2 + P = \rho h\ddot{\psi}_3 \qquad (3)$$

حال اگر برای ورق نازک از اینرسی چرخشی صرف نظر کنیم (شبیه تیر $(EulerBernuli)$).

$$\begin{cases} (1) & M_{11,1} + M_{12,2} + V_1 = 0 \\ (2) & M_{21,1} + M_{22,2} + V_2 = 0 \\ (3) & V_{1,1} + V_{2,2} + P = \rho h\ddot{\psi}_3 \end{cases}$$

معادلات (۱) و (۲) مربوط به تعادل و معادله (۳) مربوط به دینامیک می‌باشد.

پس داریم:

$$M_{11,1} + \underbrace{M_{12,2} + M_{21,1}}_{2M_{12,2}} + M_{22,2} + P = \rho h\ddot{\psi}_3$$

اگر $\rho^\star = \rho h$ قرار دهیم:

$$M_{11,1} + 2M_{12,2} + M_{22,2} + P = \rho^\star\ddot{\psi}_3$$

حال باید M_{11}, M_{12}, M_{22} بدست آوریم و جاگذاری کنیم.

$$M_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}(\psi_{3,11} + \nu\psi_{3,22})\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3^2 dx_3 =$$

$$-\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\psi_{3,11} + \nu\psi_{3,22}) = -D(\psi_{3,11} + \nu\psi_{3,22})$$

$$M_{۲۲} = \frac{E}{۱-\nu^{۲}}(\psi_{۳,۲۲} + \nu\psi_{۳,۱۱}) \int_{-\frac{h}{۲}}^{\frac{h}{۲}} x_{۳}^{۲} dx_{۳} =$$

$$-\frac{Eh^{۳}}{۱۲(۱-\nu^{۲})}(\psi_{۳,۲۲} + \nu\psi_{۳,۱۱}) = -D(\psi_{۳,۲۲} + \nu\psi_{۳,۱۱})$$

$$M_{۱۲} = \frac{E}{۱+\nu}\psi_{۳,۱۲} \int_{-\frac{h}{۲}}^{\frac{h}{۲}} x_{۳}^{۲} dx_{۳} =$$

$$-\frac{Eh^{۳}}{۱۲(۱+\nu)}\psi_{۳,۱۲} \Longrightarrow^{\times\frac{۱-\nu}{۱-\nu}} = -D(۱-\nu)\psi_{۳,۱۲}$$

حال اگر در معادله قرار دهیم:

$$-D(\psi_{۳,۱۱۱۱}+\nu\psi_{۳,۲۲۱۱})-۲D(۱-\nu)\psi_{۳,۱۲۲۱}-D(\psi_{۳,۲۲۲۲}+\nu\psi_{۳,۱۱۲۲})+P = \rho^{\star}\ddot{\psi}_{۳}$$

در اینصورت معادله دیفرانسیل ورق نازک ($ThinPlate$) بدست خواهد آمد:

$$-\nabla^{۲}\left[\psi_{۳,۱۱} + \psi_{۳,۲۲}\right] + \frac{P}{D} = \frac{\rho^{\star}}{D}\ddot{\psi}_{۳}$$

اگر برای ارتعاشات آزاد ($FreeVibration$) بررسی کنیم:

$$P = ۰ \Longrightarrow$$

$$-\nabla^{۲}\left[\psi_{۳,۱۱} + \psi_{۳,۲۲}\right] = \frac{\rho^{\star}}{D}\ddot{\psi}_{۳}$$

به روش تحلیلی خواهیم داشت:

$$\psi_{۳}(x_{۱}, x_{۲}, t) = \psi^{\star}(x_{۱}, x_{۲})\ g(t)$$

با قرار دادن در معادله دیفرانسیل ورق داریم:

$$-g(t)\left[\nabla^{۴}(\psi_{۳}^{\star})\right] = \frac{\rho^{\star}}{D}\psi_{۳}^{\star}\ \ddot{g}(t) \Longrightarrow$$

$$-\nabla^{۴}(\psi_{۳}^{\star}) = \frac{-\rho\omega^{۲}}{D}\psi_{۳}^{\star}$$

دراین صورت: $-\beta^{۴} = -\frac{\rho\omega^{۲}}{D}$

پس می‌توان عبارت بدست آمده را به صورت زیر نوشت:

$$\psi^{\star}_{۳}(\nabla^{۴} - \beta^{۴}) = ۰ \Longrightarrow (\nabla^{۲} - \beta^{۲})(\nabla^{۲} + \beta^{۲})\psi^{\star} = ۰$$

بنابراین: $\psi^{\star} = w_{۱} + w_{۲}$ خواهد بود که شامل دو قسمت است.

$$If \quad (I): \qquad w_{۱} = (\nabla^{۲} - \beta^{۲})\psi^{\star} \Longrightarrow \nabla^{۲}w + \beta^{۲}w = ۰$$

$$If \quad (II): \qquad w_{۲} = (\nabla^{۲} + \beta^{۲})\psi^{\star} \Longrightarrow \nabla^{۲}w - \beta^{۲}w = ۰$$

حل به روش تحلیلی:

$$w_{۱} = f(x_{۱})\ g(x_{۲}) \quad ,w_{۲} = f^{\star}(x_{۱})\ g^{\star}(x_{۲})$$

$$If \quad (I): \qquad \nabla^{۲}w + \beta^{۲}w = ۰$$

$$w_{۱} = f(x_{۱})\ g(x_{۲})$$

$$f''(x_{۱})g(x_{۲}) + f(x_{۱})g''(x_{۲}) + \beta^{۲}\ [f(x_{۱})g(x_{۲})] = ۰ \Longrightarrow$$

$$\frac{f''(x_{۱})}{f(x_{۱})} + \frac{g''(x_{۲})}{g(x_{۲})} = -\beta^{۲} \begin{cases} \nearrow \frac{g''(x_{۲})}{g(x_{۲})} + \beta^{۲} = -\frac{f''(x_{۱})}{f(x_{۱})} = \alpha^{۲} \\ \searrow \frac{f''(x_{۱})}{f(x_{۱})} + \beta^{۲} = -\frac{g''(x_{۲})}{g(x_{۲})} = \gamma^{۲} \end{cases}$$

دراین صورت:

$$\alpha^{۲} + \gamma^{۲} = \beta^{۲}$$

$$f(x_{۱}) = A\sin\alpha x_{۱} + B\cos\alpha x_{۱} \quad ,g(x_{۲}) = C\sin\gamma x_{۲} + D\cos\gamma x_{۲}$$

$$w_{۱} = f(x_{۱})\ g(x_{۲}) = C_{۱}\sin\alpha x_{۱}\sin\gamma x_{۲} + C_{۲}\sin\alpha x_{۱}\cos\gamma x_{۲} +$$

$$C_{۳}\cos\alpha x_{۱}\sin\gamma x_{۲} + C_{۴}\cos\alpha x_{۱}\cos\gamma x_{۲}$$

$$If \quad (II): \qquad \nabla^{۲} w - \beta^{۲} w = ۰$$

$$w_{۲} = f^{\star}(x_{۱}) g^{\star}(x_{۲})$$

$$f''^{\star}(x_{۱}) g^{\star}(x_{۲}) + f^{\star}(x_{۱}) g''^{\star}(x_{۲}) - \beta^{۲} \left[f^{\star}(x_{۱}) g^{\star}(x_{۲}) \right] = ۰ \Longrightarrow$$

$$\frac{f''^{\star}(x_{۱})}{f^{\star}(x_{۱})} + \frac{g''^{\star}(x_{۲})}{g^{\star}(x_{۲})} =$$

$$\beta^{۲} \begin{cases} \nearrow \frac{g''^{\star}(x_{۲})}{g^{\star}(x_{۲})} - \beta^{۲} = -\frac{f''^{\star}(x_{۱})}{f^{\star}(x_{۱})} = \alpha^{۲} \\ \searrow \frac{f''^{\star}(x_{۱})}{f^{\star}(x_{۱})} - \beta^{۲} = -\frac{g''^{\star}(x_{۲})}{g^{\star}(x_{۲})} = \gamma^{۲} \end{cases}$$

دراین‌صورت:

$$\alpha^{۲} + \gamma^{۲} = -\beta^{۲}$$

$$f^{\star}(x_{۱}) = A^{\star} \sinh \alpha x_{۱} + B^{\star} \cosh \alpha x_{۱} \quad ,g \quad {}^{\star}(x_{۲}) = C^{\star} \sinh \gamma x_{۲} + D^{\star} \cosh \gamma x_{۲}$$

$$w_{۲} = f^{\star}(x_{۱})\ g^{\star}(x_{۲}) = C_{۱}^{\star} \sinh \alpha x_{۱} \sinh \gamma x_{۲} + C_{۲}^{\star} \sinh \alpha x_{۱} \cosh \gamma x_{۲} +$$

$$C_{۳}^{\star} \cosh \alpha x_{۱} \sinh \gamma x_{۲} + C_{۴}^{\star} \cosh \alpha x_{۱} \cosh \gamma x_{۲}$$

بنابراین:

$$\psi^{\star} = w_{۱} + w_{۲} = C_{۱} \sin \alpha x_{۱} \sin \gamma x_{۲} + C_{۲} \sin \alpha x_{۱} \cos \gamma x_{۲} +$$

$$C_{۳} \cos \alpha x_{۱} \sin \gamma x_{۲} + C_{۴} \cos \alpha x_{۱} \cos \gamma x_{۲} +$$

$$C_{۱}^{\star} \sinh \alpha x_{۱} \sinh \gamma x_{۲} + C_{۲}^{\star} \sinh \alpha x_{۱} \cosh \gamma x_{۲} +$$

$$C_{۳}^{\star} \cosh \alpha x_{۱} \sinh \gamma x_{۲} + C_{۴}^{\star} \cosh \alpha x_{۱} \cosh \gamma x_{۲}$$

اگر هر چهار طرف را تکیه گاه ساده در نظر بگیریم و شرایط مرزی را بنویسیم .

$$\psi^{\star} = \sin\frac{m\pi}{a}x_{۱}\sin\frac{n\pi}{b}x_{۲} \qquad n = ۱, ۲, ۳, ...$$

$$\beta^{۲} = \alpha^{۲} + \gamma^{۲} = \frac{n^{۲}\pi^{۲}}{b^{۲}} + \frac{m^{۲}\pi^{۲}}{a^{۲}} = \pi^{۲}\left[\frac{m^{۲}}{a^{۲}} + \frac{n^{۲}}{b^{۲}}\right]$$

در این صورت فرکانس طبیعی ω_n :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{D}{\rho^{\star}}}\beta^{۲} = \sqrt{\frac{D}{\rho^{\star}}}\pi^{۲}\left[\frac{m^{۲}}{a^{۲}} + \frac{n^{۲}}{b^{۲}}\right]$$

ارتعاشات سه بعدی
$(Three Dimensional Vibration)$:

برای آنکه به ارتعاشات سه بعدی بپردازیم ابتدا باید معادله ناویر را بنویسیم و با استفاده از آن به معادله های سرعت انتشار موج که به دو صورت اسکالر $(Scalar)$ و برداری $(Vector)$ است برسیم.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

که در آن σ_{ij} :

$$\sigma_{ij} = \lambda \underbrace{\epsilon_{kk}}_{\frac{\partial u_k}{\partial x_k}} \delta_{ij} + 2\mu \underbrace{\epsilon_{ij}}_{\frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{x_i})}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}) =$$

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}) + \mu \left[\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}) \right] \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \lambda(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_k}) + \mu \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right]$$

دراین صورت اگر اندیسهای j,k ابتدا و انتها را مساوی قرار دهیم.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

که عبارت بالا به صورت اندیسی:

$$\sigma_{ij,j} = (\lambda + \mu) u_{j,ij} + \mu u_{i,jj}$$

حال اگر در معادله ناویر جاگذاری کنیم:

$$(\lambda + \mu) u_{j,ij} + \mu u_{i,jj} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \Longrightarrow$$

$$(\lambda+\mu)u_{j,ij}+\mu u_{i,jj}+f_i=\rho\ddot{u}_i$$

عبارت بالا به صورت برداری:

$$(\lambda+\mu)\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}.\vec{u})+\mu\vec{\nabla}^{2}.\vec{u}+f_i=\rho\ddot{\vec{u}}_i$$

اگر از نیروهای جسمی صرف نظر کنیم:

$$(\lambda+\mu)\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}.\vec{u})+\mu\vec{\nabla}^{2}.\vec{u}=\rho\ddot{\vec{u}}_i$$

از طرفی:

$$\vec{\nabla}^{2}.\vec{u}=\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}.\vec{u})-\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{u})$$

بنابراین با جاگذاری داریم:

$$(\lambda+2\mu)\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}.\vec{u})-\mu\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{u})=\rho\ddot{\vec{u}}$$

تجزیه هلم هولتز $(HelmHoltz)$:

$$\vec{u}=\vec{\nabla}.\phi+\vec{\nabla}\times\vec{H}$$

بنابراین عبارات بالا با استفاده از تجزیه هلم هولتز $(HelmHoltz)$:

$$\vec{\nabla}.\vec{u}=\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}.\phi)+\underbrace{\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\times\vec{H})}_{=0}=\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}.\phi)=\vec{\nabla}^{2}.\phi$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{u}=\underbrace{\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}.\phi)}_{=0}+\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{H})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\times\vec{H})-\vec{\nabla}^{2}\vec{H}\Longrightarrow$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{u})=\underbrace{\vec{\nabla}\times\left[\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{H})\right]}_{=0}-\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}^{2}\vec{H})=-\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}^{2}\vec{H})$$

حال اگر جاگذاری کنیم:

$$(\lambda+2\mu)\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}^{2}.\phi)+\mu\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}^{2}\vec{H})=\rho\ddot{\vec{u}}$$

ازطرفی $\ddot{\vec{u}}$:

$$\ddot{\vec{u}} = \frac{\partial^{۲} u}{\partial t^{۲}} = \frac{\partial^{۲}}{\partial t^{۲}}\left[\vec{\nabla}.\phi + \vec{\nabla}\times\vec{H}\right] \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial^{۲} u}{\partial t^{۲}} = \frac{\partial^{۲}}{\partial t^{۲}}(\vec{\nabla}.\phi) + \frac{\partial^{۲}}{\partial t^{۲}}(\vec{\nabla}\times\vec{H}) = \vec{\nabla}\frac{\partial^{۲}\phi}{\partial t^{۲}} + \vec{\nabla}\times\frac{\partial^{۲}\vec{H}}{\partial t^{۲}}$$

باجاگذاری دررابطه اصلی داریم:

$$(\lambda + ۲\mu)\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}^{۲}.\phi) + \mu\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}^{۲}\vec{H}) = \rho\left[\vec{\nabla}\frac{\partial^{۲}\phi}{\partial t^{۲}} + \vec{\nabla}\times\frac{\partial^{۲}\vec{H}}{\partial t^{۲}}\right]$$

عبارت بالا به دومعادله تقسیم می شود.

$$(I)(\qquad \lambda + ۲\mu)\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}^{۲}.\phi) = \rho\vec{\nabla}\frac{\partial^{۲}\phi}{\partial t^{۲}} \Longrightarrow$$

$$(II) \qquad \mu\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}^{۲}\vec{H}) = \rho\vec{\nabla}\times\frac{\partial^{۲}\vec{H}}{\partial t^{۲}} \Longrightarrow$$

$$(I)(\qquad \vec{\nabla}^{۲}.\phi) = \frac{\rho}{(\lambda + ۲\mu)}\frac{\partial^{۲}\phi}{\partial t^{۲}}$$

$$(II)(\qquad \vec{\nabla}^{۲}\vec{H}) = \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^{۲}\vec{H}}{\partial t^{۲}}$$

که درعبارت بالا $\frac{\rho}{(\lambda+۲\mu)} = \frac{۱}{C_{۱}^{۲}}$ و $\frac{\rho}{\mu} = \frac{۱}{C_{۲}^{۲}}$ می باشد.
دراین صورت:

$$(I)(\qquad \vec{\nabla}^{۲}.\phi) = \frac{۱}{C_{۱}^{۲}}\frac{\partial^{۲}\phi}{\partial t^{۲}}$$

$$(II)(\qquad \vec{\nabla}^{۲}\vec{H}) = \frac{۱}{C_{۲}^{۲}}\frac{\partial^{۲}\vec{H}}{\partial t^{۲}}$$

سرعت انتشارموج درجامدات ارتجاعی به دوصورت است:

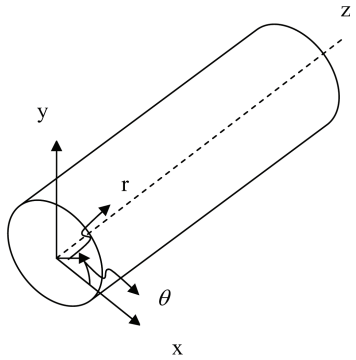
۱− $C_{۱}$ =سرعت امواج غیرچرخشی (انبساطی) $(DialatationWave)$.

۲− $C_{۲}$ =سرعت امواج چرخشی (غیرانبساطی) $(DistortionalWave)$.

برای حل کردن مسائل ارتعاشات سه بعدی سه معادله برداری و یک معادله اسکالر داریم .

۱۳—۲— بررسی ارتعاشات یک استوانه .

معادله دیفرانسیل حرکت و فرکانسهای ارتعاش را بدست آورید:



شکل(13-2-1)

ابتدا باید معادله ارتعاش موج را برای آن حل کنیم.

$$(\vec{\nabla}^{۲}.\phi) = \frac{\rho}{(\lambda + ۲\mu)}\frac{\partial^{۲}\phi}{\partial t^{۲}} = \frac{۱}{C_{۱}^{۲}}\frac{\partial^{۲}\phi}{\partial t^{۲}}$$

برای استوانه داریم :

$$\nabla^{۲} = \frac{\partial^{۲}}{\partial r^{۲}} + \frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{۱}{r^{۲}}\frac{\partial^{۲}}{\partial \theta^{۲}} + \frac{\partial^{۲}}{\partial z^{۲}}$$

با قرار دادن در معادله ارتعاش موج :

$$\vec{\nabla}^{۲}\phi = \frac{\partial^{۲}\phi}{\partial r^{۲}} + \frac{۱}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{۱}{r^{۲}}\frac{\partial^{۲}\phi}{\partial \theta^{۲}} + \frac{\partial^{۲}\phi}{\partial z^{۲}} = \frac{۱}{C_{۱}^{۲}}\frac{\partial^{۲}\phi}{\partial t^{۲}}$$

به صورت اندیسی :

$$\phi_{,rr} + \frac{۱}{r}\phi_{,r} + \frac{۱}{r^{۲}}\phi_{,\theta\theta} + \phi_{,zz} = \frac{۱}{C_{۱}^{۲}}\ddot{\phi}$$

به روش تحلیلی :

$$\phi = \phi(r,\theta,z,t) = \phi^{\star}(r,\theta,z)\ g(t)$$

$$g(t)\left[\phi^{\star}_{,rr} + \frac{۱}{r}\phi^{\star}_{,r} + \frac{۱}{r^{۲}}\phi^{\star}_{,\theta\theta} + \phi^{\star}_{,zz}\right] = \frac{۱}{C_{۱}^{۲}}\phi^{\star}\ddot{g}(t)$$

می دانیم : $\frac{\ddot{g}(t)}{g(t)} = -\omega^{۲}$
پس داریم :

$$\phi^{\star}_{,rr} + \frac{۱}{r}\phi^{\star}_{,r} + \frac{۱}{r^{۲}}\phi^{\star}_{,\theta\theta} + \phi^{\star}_{,zz} = \underbrace{-\frac{\omega^{۲}}{C^{۲}_{۱}}}_{-k^{۲}_{۱}}\phi^{\star}$$

$$If \quad : \qquad \phi^{\star}(r,\theta,z) = \psi_r(r)\psi_\theta(\theta)\psi_z(z)$$

اگر قرار دهیم :

$$\psi''_r(r)\psi_\theta(\theta)\psi_z(z) + \frac{۱}{r}\psi'_r(r)\psi_\theta(\theta)\psi_z(z) + \frac{۱}{r^{۲}}\psi''_\theta(\theta)\psi_r(r)\psi_z(z) + \psi''_z(z)\psi_r(r)\psi_\theta(\theta) =$$

$$-k^{۲}\psi_r(r)\psi_\theta(\theta)\psi_z(z)$$

اگر عبارت بالا را بر $\psi_r(r)\psi_\theta(\theta)\psi_z(z)$ تقسیم کنیم :

$$\frac{\psi''_r(r)}{\psi_r(r)} + \frac{۱}{r}\frac{\psi'_r(r)}{\psi_r(r)} + \frac{۱}{r^{۲}}\frac{\psi''_\theta(\theta)}{\psi_\theta(\theta)} = -k^{۲} = -\frac{\psi''_z(z)}{\psi_z(z)} = m^{۲} \Longrightarrow$$

$$\psi''_z(z) = -m^{۲}\psi_z(z)$$

بنابر این :

$$\psi_z(z) = A\sin mz + B\cos mz$$

اگر عبارت بالا را در $r^{۲}$ ضرب کنیم :

$$r^{۲}\left[\frac{\psi''_r(r)}{\psi_r(r)} + \frac{۱}{r}\frac{\psi'_r(r)}{\psi_r(r)} + k^{۲}_{۱} - m^{۲}\right] = -\frac{\psi''_\theta(\theta)}{\psi_\theta(\theta)} = n^{۲} \Longrightarrow$$

$$\psi_\theta(\theta) = C\sin n\theta + D\cos n\theta$$

در این صورت داریم :

$$r^{۲}\frac{\psi''_r(r)}{\psi_r(r)} + r\frac{\psi'_r(r)}{\psi_r(r)} + r^{۲}k^{۲}_{۱} - r^{۲}m^{۲} - n^{۲} = ۰$$

اگر عبارت بالا را در $\psi_r(r)\frac{1}{r^2}$ ضرب کنیم :

$$\psi_r''(r) + \frac{1}{r}\psi_r'(r) - \psi_r(r)\left[\underbrace{k_1^2 - m^2}_{\alpha} - \frac{1}{r^2}n^2\right] = 0$$

که این یک تابع بسل از نوع استوانه‌ای می باشد .
پس :

$$\psi_r(r) = G\ J_N(\alpha r) + K\ Y_n(\alpha r)$$

بنابر این :

$$\phi^\star(r,\theta,z) = \psi_r(r)\psi_\theta(\theta)\psi_z(z) =$$

$$(A\sin mz + B\cos mz)(C\sin n\theta + D\cos n\theta)(G\ J_N(\alpha r) + K\ Y_n(\alpha r))$$

اگر شرایط مرزی را بنویسیم ، در این صورت فرکانسهای طبیعی ارتعاش ω و مُدهای طبیعی ارتعاش ϕ بدست خواهند آمد .

۱۴—۲— بررسی ارتعاشات یک کره .
معادله دیفرانسیل حرکت و فرکانسهای ارتعاش را بدست آورید:

با استفاده از معادله برداری موج در دستگاه قطبی :

$$(\vec{\nabla}^{۲}\vec{H}) = \frac{۱}{C_{۲}^{۲}}\frac{\partial^{۲}\vec{H}}{\partial t^{۲}}$$

میدان برداری $\vec{H}$:

$$\vec{H} = H_r\vec{e_r} + H_\theta\vec{e_\theta} + H_\psi\vec{e_\psi}$$

از طرفی داریم :

$$\vec{\nabla}^{۲}.\vec{H} = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla}.\vec{H}) - \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{H})$$

$$\vec{\nabla}.\vec{H} = \frac{۱}{h_r h_\theta h_\psi}\left[\frac{\partial}{\partial r}(h_\theta h_\psi A_r) + \frac{\partial}{\partial\theta}(h_r h_\psi A_\theta) + \frac{\partial}{\partial\psi}(h_r h_\theta A_\psi)\right] =$$

$$\frac{۱}{۱\times r\times r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^{۲}\sin\theta H_r) + \frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta H_\theta) + \frac{\partial}{\partial\psi}(rH_\psi)\right] =$$

$$\frac{۱}{r^{۲}\sin\theta}\left[۲r\sin\theta H_r + r^{۲}\sin\theta\frac{\partial H_r}{\partial r} + r\cos\theta H_\theta + r\sin\theta\frac{\partial H_\theta}{\partial\theta} + r\frac{\partial H_\psi}{\partial\psi}\right] =$$

$$\frac{۲}{r}H_r + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{\cot\theta}{r}H_\theta + \frac{۱}{r}\frac{\partial H_\theta}{\partial\theta} + \frac{۱}{r\sin\theta}\frac{\partial H_\psi}{\partial\psi}$$

$$\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}.\vec{H}) = \frac{\partial}{\partial r}(\vec{\nabla}.\vec{H})\vec{e_r} + \frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\vec{\nabla}.\vec{H})\vec{e_\theta} +$$

$$\frac{۱}{r^{۲}\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\psi}(\vec{\nabla}.\vec{H})\vec{e_\psi} =$$

$$(\ \frac{-۲}{r^{۲}}H_r + \frac{۲}{r}\frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{\partial^{۲}H_r}{\partial r^{۲}} - \frac{\cot\theta}{r^{۲}}H_\theta - \frac{۱}{r^{۲}}\frac{\partial H_\theta}{\partial\theta} -$$

$$\frac{۱}{r^{۲}\sin\theta}\frac{\partial H_\psi}{\partial\psi}\ )\vec{e_r} +$$

$$(-\frac{(۱+\cot^{۲}\theta)}{r^{۲}}H_\theta + \frac{\cot\theta}{r^{۲}}\frac{\partial H_\theta}{\partial\theta} + \frac{۱}{r^{۲}}\frac{\partial^{۲}H_\theta}{\partial\theta^{۲}} -$$

$$\frac{۱}{r^{۲}}\frac{\cos\theta}{\sin^{۲}\theta}\frac{\partial H_\psi}{\partial\psi}\ )\vec{e_\theta} +$$

$$(\frac{۱}{r^{۳}\sin^{۲}\theta}\frac{\partial^{۲}H_\psi}{\partial\psi^{۲}}\ )\vec{e_\psi}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} =$$

$$\frac{۱}{h_r h_\theta h_\psi}\begin{bmatrix} h_r\vec{e_r} & h_\theta\vec{e_\theta} & h_\psi\vec{e_\psi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\psi} \\ h_r H_r & h_\theta H_\theta & h_\psi H_\psi \end{bmatrix} =$$

$$\frac{۱}{r^{۲}\sin\theta}\begin{bmatrix} \vec{e_r} & r\vec{e_\theta} & r\sin\theta\vec{e_\psi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\psi} \\ H_r & rH_\theta & r\sin\theta H_\psi \end{bmatrix} =$$

$$\frac{۱}{r^{۲}\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta H_\psi) - \frac{\partial}{\partial\psi}(rH_\theta)\right]\vec{e_r} - \left[\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta H_\psi) - \frac{\partial}{\partial\psi}(H_r)\right] r\vec{e_\theta} +$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}(rH_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}(H_r)\right] r\sin\theta\vec{e_\psi} =$$

$$\frac{۱}{r^{۲}\sin\theta}\left[(r\cos\theta H_\psi)\vec{e_r} - (r\sin\theta H_\psi)\vec{e_\theta} + (rH_\theta\sin\theta)\vec{e_\psi}\right] =$$

$$\frac{\cot\theta}{r}H_\psi\vec{e_r} - \frac{۱}{r}H_\psi\vec{e_\theta} + \frac{۱}{r}H_\theta\vec{e_\psi}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) =$$

$$\frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{bmatrix} \vec{e}_r & r\,\vec{e}_\theta & r\sin\theta\,\vec{e}_\psi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \psi} \\ H_\psi \frac{\cot\theta}{r} & -H_\psi & \sin\theta H_\theta \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{r^2 \sin\theta}[(\cos\theta H_\theta + \sin\theta \frac{\partial H_\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\psi}{\partial \psi})\,\vec{e}_r + (\frac{\cot\theta}{r}\frac{\partial H_\psi}{\partial \psi}) r\,\vec{e}_\theta +$$

$$(\frac{H_\psi}{r}(1 + \cot^2\theta)) r \sin\theta\,\vec{e}_\psi] =$$

$$\frac{1}{r^2 \sin\theta}[\,(\cos\theta H_\theta + \sin\theta \frac{\partial H_\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\psi}{\partial \psi})\,\vec{e}_r + (\cos\theta \frac{\partial H_\psi}{\partial \psi})\,\vec{e}_\theta +$$

$$(H_\psi \csc\theta)\,\vec{e}_\psi\,] =$$

$$(\frac{\cot\theta}{r^2} H_\theta + \frac{1}{r^2}\frac{\partial H_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial H_\psi}{\partial \psi})\,\vec{e}_r + (\frac{\cos\theta}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial H_\psi}{\partial \psi})\,\vec{e}_\theta +$$

$$(\frac{1}{r^2 \sin^2\theta} H_\psi)\,\vec{e}_\psi$$

حال اگر عبارت‌های بالا را در معادله برداری موج (کره) قرار دهیم، معادله حرکت کره بدست می‌آید.

حال با تعیین شرایط مرزی فرکانسهای طبیعی ارتعاش ω و مدهای طبیعی ارتعاش ϕ بدست خواهند آمد.