

الکترومغناطیس

۱ - ناحیه‌ی $a \leq R \leq 2a$ در مختصات کروی دارای بار الکتریکی با چگالی حجمی $\rho = R^2$ کولن بر مترمکعب می‌باشد شدت میدان الکتریکی در $R = 2a$ کدام است؟

$$(1) \frac{31a^2}{20\epsilon_0} \quad (2) \frac{8a^2}{5\epsilon_0} \quad (3) \frac{8a^2}{3\epsilon_0} \quad (4) \frac{31a^2}{5\epsilon_0}$$

۲ - ناحیه‌ی $0 \leq R \leq a$ و $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ و $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ دارای بار حجمی با چگالی یکنواخت ρ می‌باشد. اندازه‌ی شدت میدان الکتریکی در نقطه‌ی $(R, \theta, \varphi) = (a, \pi, 0)$ کدام است؟

$$(1) \frac{\rho a}{3\epsilon_0} \left(\pi + 2\sqrt{2} \right) \quad (2) \frac{\rho a}{3\epsilon_0} \left(\pi + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right)$$

$$(3) \frac{\rho a}{4\epsilon_0} \left(\pi + 2\sqrt{2} - 4 \right) \quad (4) \frac{\rho a}{8\epsilon_0} (3\pi - 4)$$

۳ - بار الکتریکی با چگالی سطحی غیریکنواخت $\rho_s = x^2 y^2$ روی صفحه‌ی $z = 1$ توزیع شده است. بار موجود در داخل مخروط $\theta \leq \frac{\pi}{4}$ چقدر است؟

$$(1) \frac{\pi}{16} \quad (2) \frac{\pi}{32} \quad (3) \frac{\pi}{24} \quad (4) \frac{\pi}{48}$$

۴ - بار الکتریکی با چگالی $\rho_s = r \cos \varphi$ بر روی ناحیه‌ی $r \leq a$ در مختصات استوانه‌ای توزیع شده است. اندازه‌ی شدت میدان الکتریکی در نقطه‌ی $(0, 0, a)$ کدام است؟

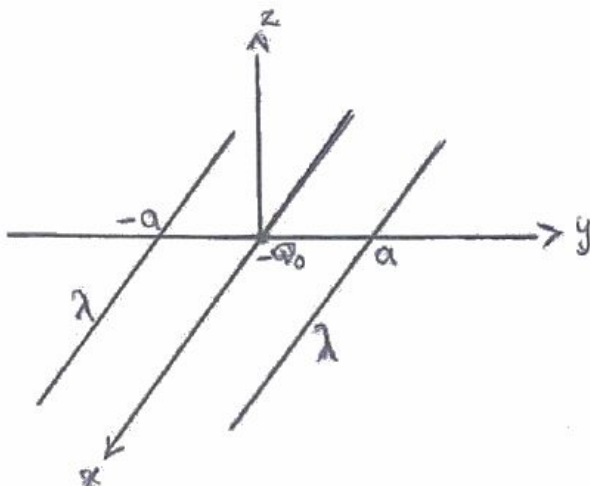
www.nashr-estekhdam.ir

$$(1) \left[\frac{\sqrt{2}-1}{8\epsilon_0} \right] a \quad (2) \left(\frac{2\sqrt{2}-4}{16\epsilon_0} \right) a \quad (3) \left(\frac{2\sqrt{2}-4}{8\epsilon_0} \right) a \quad (4) \left(\frac{2\sqrt{2}-2}{8\epsilon_0} \right) a$$

۵ - یک حلقه مربعی شکل به ضلع $2a$ و مرکز مبدأ مختصات در صفحه xy مفروض است اگر اضلاع مربع دارای بار الکتریکی با چگالی یکنواخت λ باشد، مقدار شدت میدان الکتریکی ناشی از این توزیع بار بر روی محور z ها در نقطه‌ی $z = a$ کدام است؟

$$(1) \frac{\lambda}{\sqrt{3}\pi\epsilon_0 a} \quad (2) \frac{\lambda}{\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a} \quad (3) \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0 a} \quad (4) \frac{\sqrt{2}\lambda}{\pi\epsilon_0 a}$$

۶ - دو سیم نامتناهی طویل و موازی با محور x ها، در صفحه xy و در $y = \pm a$ قرار گرفته‌اند و دارای چگالی خطی مثبت λ می‌باشند. بار نقطه‌ای منفی $(-Q_0)$ به جرم m در مبدأ مختصات واقع شده است. فرکانس نوسانات این بار برای جابه‌جایی‌های کوچک در راستای محور z ها چند Hz است؟



$$\frac{\sqrt{2\pi\lambda Q_0}}{a\sqrt{m\pi\epsilon_0}} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{2\pi\lambda Q_0}}{a\sqrt{m\pi\epsilon_0}} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{2\pi\lambda Q_0}}{a\sqrt{m\pi\epsilon_0}} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{2\pi\lambda Q_0}}{a\sqrt{m\pi\epsilon_0}} \quad (4)$$

۷ - اگر r فاصله از مبدأ مختصات باشد مقدار انتگرال زیر کدام است؟ (V : حجم کره‌ای به شعاع a و مرکز مبدأ مختصات است)

$$I = \int_V \left(\frac{r^2}{r^2 + 4} \right) \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) dV$$

$$\pi \quad (4)$$

$$2\pi \quad (3)$$

$$8\pi \quad (2)$$

$$4\pi \quad (1)$$

۸ - اگر میدان الکتریکی در مختصات کروی به صورت $\vec{E} = \frac{\hat{r} + (\sin\theta \cos\phi)\hat{\phi}}{r}$ باشد، مقدار چگالی بار حجمی در نقطه‌ای

www.nashr-estekhdam.ir

$$\left(0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right) \text{ کدام است؟}$$

$$8\epsilon_0 \quad (4)$$

$$6\epsilon_0 \quad (3)$$

$$3\epsilon_0 \quad (2)$$

$$2\epsilon_0 \quad (1)$$

۹ - در ناحیه‌ی $|z| \leq h$ بار الکتریکی با چگالی حجمی $\rho = 1 - \frac{|z|}{h}$ توزیع شده است. نسبت شدت میدان الکتریکی در $z = \frac{h}{2}$ به

شدت میدان الکتریکی در $z = 2h$ کدام است؟

$$1 \quad (4)$$

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

۱۰- بار الکتریکی با چگالی یکنواخت ρ_ℓ بر روی حلقه‌ای به شعاع a و مرکز مبدأ مختصات و واقع در صفحه‌ی xy مفروض است. ماکزیمم شدت میدان الکتریکی روی محور z ‌ها کدام است؟

$$(۱) \frac{\rho_\ell}{3\sqrt{3}\epsilon_0 a} \quad (۲) \frac{\rho_\ell}{2\sqrt{2}\epsilon_0 a} \quad (۳) \frac{\rho_\ell}{6\sqrt{3}\epsilon_0 a} \quad (۴) \frac{\rho_\ell}{\sqrt{6}\epsilon_0 a}$$

۱۱- بار الکتریکی با چگالی P_s بر روی نیم کره‌ی $\theta \leq \frac{\pi}{2}$ و $R = a$ توزیع شده است، شدت میدان الکتریکی در نقطه‌ی $(R = 2a, \theta = 0, \varphi = 0)$ کدام است؟

$$(۱) \frac{\rho_s}{32\epsilon_0} (3 \ln 5 + 4) \hat{z} \quad (۲) \frac{\rho_s}{32\epsilon_0} (3 \ln 5 + 2) \hat{z}$$

$$(۳) \frac{\rho_s}{16\epsilon_0} (3 \ln 5 + 2) \hat{z} \quad (۴) \frac{\rho_s}{16\epsilon_0} (3 \ln 5 + 4) \hat{z}$$

۱۲- تابع اسکالر $T = xy^2$ مفروض است حاصل انتگرال $\int_A^B (\nabla T) \cdot d\vec{\ell}$ کدام است؟

www.nashr-estekhdam.ir

($A(0,0,0)$ و $B(2,1,2)$ در مختصات دکارتی می‌باشد)

$$(۱) ۱ \quad (۲) ۲ \quad (۳) ۳ \quad (۴) ۴$$

الکترومغناطیس

۱- گزینه «۱» صحیح است.

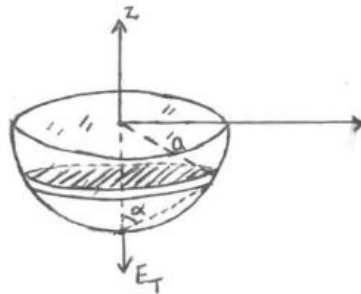
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} [R^2 E_R] = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial R} [R^2 E_R] = \frac{\rho R^2}{\epsilon_0}$$

$$R^2 E_R = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} + C$$

$$E(R=a) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0} + C \Rightarrow C = -\frac{\rho a^3}{3\epsilon_0}$$

$$R^2 E_R = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (R^3 - a^3) \Rightarrow E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{R^3 - a^3}{R^2} \right)$$

$$E(R=r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{r^3 - a^3}{r^2} \right) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right)$$



۲- گزینه «۳» صحیح است.

به دلیل تقارن مشخص است که:

میدان در نقطه‌ی موردنظر در جهت $(-\hat{z})$ می‌باشد.

$$dE = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} (1 - \cos \alpha) (-\hat{z})$$

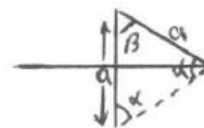
$$r\alpha + \beta = \pi \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{r} - \frac{\beta}{r}$$

$$\cos \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{r} - \frac{\beta}{r} \right) = \sin \left(\frac{\beta}{r} \right), \quad \rho_s = \rho dl = \rho a d\beta$$

$$dE = \frac{\rho a d\beta}{\epsilon_0} \left(1 - \sin \left(\frac{\beta}{r} \right) \right) (-\hat{z})$$

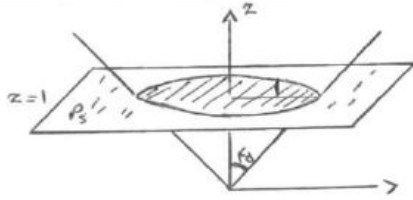
$$E = \int dE = \frac{\rho a}{\epsilon_0} \left(\beta + r \cos \frac{\beta}{r} \right) \Big|_0^{\pi} (-\hat{z}) = \frac{\rho a}{\epsilon_0} \left(\frac{\pi}{r} + \sqrt{r} - r \right) (-\hat{z})$$

$$|E| = \frac{\rho a}{\epsilon_0} (\pi + r\sqrt{r} - r)$$



www.nashr-estekhdam.ir

۳- گزینه «۳» صحیح است.



برخورد صفحه‌ی $z=1$ و مخروط دیسکی به شعاع a خواهد بود.

$$Q = \int \rho_s dS_z = \int (x^2 + y^2) r dr d\varphi = \int (r \cos \varphi)^2 (r \sin \varphi)^2 r dr d\varphi$$

$$= \int r^6 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi dr d\varphi = \left[\frac{r^7}{7} \right]_0^1 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi$$

$$= \frac{1}{7} \times \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4\varphi \right) d\varphi = \frac{\pi}{7}$$

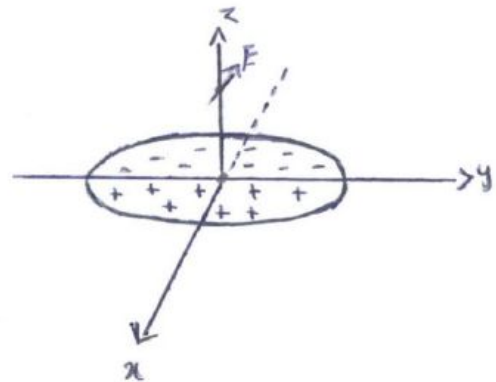
۴- گزینه «۲» صحیح است.

با توجه به اینکه تابع $\cos \varphi$ برای $0 < X$ مثبت و برای $X < 0$ منفی است و تقارن موجود می‌توان نتیجه گرفت که میدان در نقطه‌ی $(0, 0, a)$ تنها در جهت $(-\hat{x})$ خواهد بود. بنابراین تنها مؤلفه‌ی X را در انتگرال حساب می‌کنیم:

$$\vec{E} = \int \frac{dQ \vec{R}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R}|^3}$$

$$\vec{E} = \int \frac{(P_s dS)(-r\vec{a}_x + a\vec{a}_z)}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$\vec{a}_x = \cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y} \Rightarrow \vec{E} = \int \frac{(r \cos \varphi)(r dr d\varphi)(-r \cos \varphi \hat{x})}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + a^2)^{3/2}}$$



$$\vec{E} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_0^a \frac{r^2 dr}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \right) \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \right)}_{\frac{\pi}{2}} \hat{x} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r\sqrt{r^2 + a^2}}{2} - r \right) a \left(\frac{\pi}{2} \right) \hat{x} = \left[\frac{r\sqrt{r^2 + a^2} - r^2}{16\epsilon_0} \right] a (-\hat{x})$$

$$\int_0^a \frac{r^2 dr}{(r^2 + a^2)^{3/2}} = \int_a^{\sqrt{r^2 + a^2}} \frac{(u^2 - a^2) u du}{u^3} = \int \left(1 - \frac{a^2}{u^2} \right) du = u + \frac{a^2}{u} \Big|_a^{\sqrt{r^2 + a^2}} = \left(\frac{r\sqrt{r^2 + a^2}}{2} - r \right) a$$

$$r^2 + a^2 = u^2 \rightarrow \begin{cases} r dr = u du \\ u^2 - a^2 = r^2 \\ a \leq u \leq a\sqrt{2} \end{cases}$$

۵- گزینه «۱» صحیح است.

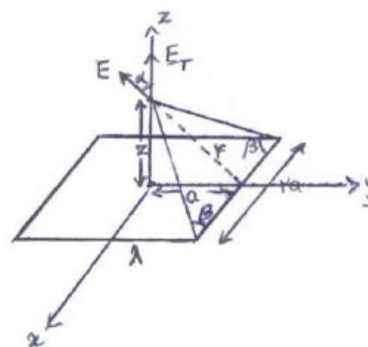
$$E_T = \epsilon |E| \cos \alpha = \epsilon \left[\frac{\lambda}{\sqrt{\pi \epsilon} r} \cos \beta \right] \cos \alpha$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi \epsilon r} \times \frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}} \times \frac{z}{r}$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda} a}{\pi \epsilon} \frac{z}{r^2 \sqrt{r^2 + a^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda} a}{\pi \epsilon} \frac{z}{(z^2 + z^2) \sqrt{z^2 + a^2}}$$

$$E(z=a) = \frac{\sqrt{\lambda} a}{\pi \epsilon} \frac{a}{a^2 \sqrt{a^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi \epsilon} a}$$



۶- گزینه «۴» صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} f &= \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{F_T}{m r}} \\ F_T &= \sqrt{\frac{\lambda Q}{\pi \epsilon a}} = \frac{\lambda Q}{\pi \epsilon a} \\ r &= a \end{aligned} \right\} \Rightarrow f = \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\lambda Q}{m \pi \epsilon a^2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \sqrt{\frac{\lambda Q}{m \pi \epsilon}}$$

۷- گزینه «۴» صحیح است.

$$I = \epsilon \pi \left(\frac{r^2}{r^2 + \epsilon} \right) \Big|_{r=0} = \pi$$

www.nashr-estekhdam.ir

۸- گزینه «۱» صحیح است.

$$\rho = \epsilon (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \epsilon \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta E_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} \right)$$

$$E_r = \frac{1}{r}, \quad E_\theta = 0, \quad E_\phi = \frac{\sin \theta \cos \phi}{r}$$

$$\rho = \epsilon \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r) + 0 + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\sin \theta \cos \phi}{r} \right) \right]$$

$$= \epsilon_0 \left[\frac{1}{r^2} - \frac{\sin \varphi}{r^2} \right] = \frac{\epsilon_0 (1 - \sin \varphi)}{r^2}$$

$$\rho = \frac{\epsilon_0 (1 - \sin(\frac{\pi}{2}))}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4\epsilon_0 \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2\epsilon_0$$

۹- گزینه «۳» صحیح است.

$$(z > 0) : \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{dE_z}{dz} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{h}\right) \Rightarrow E = \frac{1}{\epsilon_0} \left(z - \frac{z^2}{2h}\right) + C_1$$

$$E(z=0)=0 \Rightarrow 0=0+C_1 \Rightarrow C_1=0 \Rightarrow E_{in} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(z - \frac{z^2}{2h}\right)$$

$$E_{in}\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{h}{2} - \frac{h^2}{4h}\right) = \frac{1}{\epsilon_0} \times \frac{rh}{4}$$

$$(z > h) : \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \frac{dE_z}{dz} = 0 \Rightarrow E_{out} = C_2$$

$$E_{out}(z=h) = E_{in}(z=h) \Rightarrow C_2 = \frac{1}{\epsilon_0} \left(h - \frac{h^2}{2h}\right) = \frac{1}{\epsilon_0} \times \frac{h}{2}$$

$$\frac{E_{in}\left(\frac{h}{2}\right)}{E_{out}(rh)} = \frac{\frac{1}{\epsilon_0} \times \frac{rh}{4}}{\frac{1}{\epsilon_0} \times \frac{h}{2}} = \frac{r}{2}$$

www.nashr-estekhdam.ir

۱۰- گزینه «۱» صحیح است.

$$E = \frac{\rho_\ell}{\epsilon_0} \frac{az}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{dE}{dz} = 0 \Rightarrow \frac{\rho_\ell a}{\epsilon_0} \left[\frac{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} - z(2z) \left(\frac{3}{2}\right) (z^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}{(z^2 + a^2)^3} \right] = 0$$

$$z^2 + a^2 - 3z^2 = 0 \Rightarrow z^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow z = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$E_{\max} = \frac{\rho_\ell}{\epsilon_0} \frac{a \times \frac{a}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{a^2}{2} + a^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\rho_\ell}{\epsilon_0 a} \frac{\frac{a^2}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{3a^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\rho_\ell}{\epsilon_0 a} \times \frac{\frac{a^2}{\sqrt{2}}}{\frac{3\sqrt{3}a^3}{2}} = \frac{\rho_\ell}{3\sqrt{3}\epsilon_0 a}$$

۱۱- گزینه «۱» صحیح است.

$$\vec{E} = \int \frac{dQ \vec{R}}{\epsilon_0 |\vec{R}|^2}$$

$$dQ = \rho_s dS_R = \rho_s a^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$\vec{R} = -a \vec{a}_R + z \vec{a}_z = -a(\cos \theta \vec{a}_z + \sin \theta \vec{a}_r) + z \vec{a}_z = (z - a \cos \theta) \vec{a}_z - a \sin \theta \vec{a}_r$$

$$|\vec{R}|^2 = (z^2 + a^2 - 2az \cos \theta)^{\frac{1}{2}}, \quad z = 2a$$

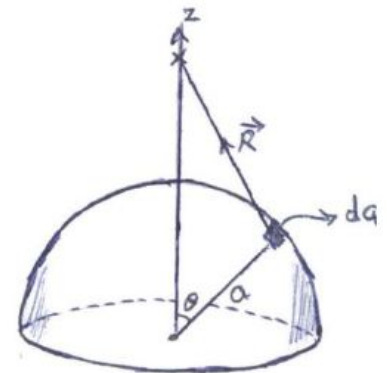
$$\vec{E}_r = \int \frac{\rho_s a^2 \sin \theta d\theta d\phi (2a - a \cos \theta)}{\epsilon_0 (4a^2 + a^2 - 4a^2 \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_z = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \int \frac{\sin \theta (2 - \cos \theta) d\theta}{(3 - 2 \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \quad \Delta - 2 \cos \theta = u \Rightarrow \begin{cases} 2 \cos \theta d\theta = -du \\ 1 < u < 3 \\ \cos \theta = \frac{3-u}{2} \end{cases}$$

$$= \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \int_1^3 \frac{\left(\frac{1}{2} du\right) \left(2 - \left(\frac{3-u}{2}\right)\right)}{u^{\frac{3}{2}}} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \int_1^3 \frac{(1+u)}{u^{\frac{3}{2}}} du = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} [2 \ln u + u^{-\frac{1}{2}}]_1^3$$

$$= \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} (2 \ln 3 + \sqrt{3})$$

www.nashr-estekhdam.ir



۱۲- گزینه «۲» صحیح است.

$$\int_A^B (\nabla T) \cdot d\vec{\ell} = T(B) - T(A) = 2 \times 1 - 0 = 2$$

الکترومغناطیس

۱ - کره‌ای به شعاع a ($a \ll 1$) دارای قطبی‌شدگی ثابت $\mathbf{P} = P_0 \hat{\mathbf{z}}$ می‌باشد. اگر مرکز کره در مبدأ مختصات و در فضای آزاد باشد.

پتانسیل الکتریکی در نقطه $(1, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{8})$ در مختصات کروی کدام است؟

$$\begin{array}{llll} \frac{P_0 a^2}{6\epsilon_0} & (1) & \frac{P_0 a^2}{3\epsilon_0} & (2) \\ \frac{P_0 a^2}{2\epsilon_0} & (3) & \frac{P_0 a^2}{\epsilon_0} & (4) \end{array}$$

۲ - کره‌ای به شعاع a در مبدأ مختصات مفروض است. در نیم کره بالایی ($Z > 0$) بار سطحی با چگالی ρ_s و در نیم کره پائینی

$Z < 0$ بار سطحی با چگالی $-2\rho_s$ قرار گرفته است. پتانسیل الکتریکی در مبدأ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} \frac{\rho_s a}{2\epsilon_0} & (1) & \frac{-\rho_s a}{\epsilon_0} & (2) \\ \frac{-\rho_s a}{2\epsilon_0} & (3) & \text{صفر} & (4) \end{array}$$

۳ - صفحه‌ی $x=0$ دو ناحیه‌ی همگن را از یکدیگر جدا نموده است. ناحیه‌ی $x < 0$ عایق با ضریب گذردهی $\epsilon_1 = 4\epsilon_0$ پر شده

و میدان الکتریکی $\vec{D} = (\hat{x} + \hat{y} + \hat{z})$ نیز در این ناحیه وجود دارد. در ناحیه‌ی $x > 0$ که با عایق $\epsilon_2 = 2\epsilon_0$ پر شده است،

بردار قطبی‌شدگی \vec{P} کدام است؟

$$\begin{array}{ll} \hat{x} + \frac{1}{2}\hat{y} + \frac{1}{2}\hat{z} & (1) \\ \frac{1}{2}\hat{x} + \frac{1}{4}\hat{y} + \frac{1}{2}\hat{z} & (2) \\ \frac{1}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{y} + \frac{1}{4}\hat{z} & (3) \\ \frac{1}{2}\hat{x} + \frac{1}{4}\hat{y} + \frac{1}{4}\hat{z} & (4) \end{array}$$

۴ - بر روی کره‌ای رسانا به شعاع a و دارای بار Q ، عایقی با ضریب حساسیت الکتریکی $\epsilon_r = 4$ و ضخامت a قرار داده ایم.

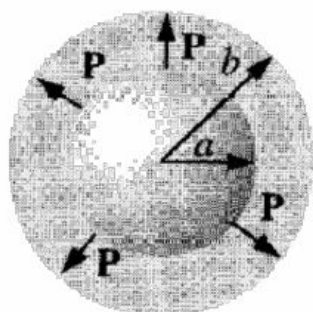
پتانسیل الکتریکی در مرکز کره کدام است؟

www.nashr-estekhdam.ir

$$\begin{array}{llll} \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a} & (1) & \frac{9Q}{160\pi\epsilon_0 a} & (2) \\ \frac{19Q}{160\pi\epsilon_0 a} & (3) & \frac{18Q}{91\pi\epsilon_0 a} & (4) \end{array}$$

۵ - یک پوسته کروی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b با ماده‌ای دی‌الکتریک با قطبی‌شدگی $\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \frac{k}{r} \hat{\mathbf{r}}$ پر شده است

شدت میدان الکتریکی در ناحیه عایق کدام است؟



$$\begin{array}{ll} E = \frac{-k}{3\epsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}} & (1) \\ E = \frac{-k}{\epsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}} & (2) \\ E = \frac{k}{3\epsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}} & (3) \\ E = \frac{k}{\epsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}} & (4) \end{array}$$

۶ - بار سطحی چگالی $\rho_s = 1^2$ بر روی دیسکی به شعاع a و مرکز مبدأ مختصات (دیسک در صفحه‌ی xy قرار دارد) توزیع شده است. پتانسیل الکتریکی در مبدأ مختصات کدام است؟

$$(1) \frac{a^2}{2\epsilon_0} \quad (2) \frac{a^2}{4\epsilon_0} \quad (3) \frac{a^2}{6\epsilon_0} \quad (4) \frac{a^2}{12\epsilon_0}$$

۷ - ناحیه $3 \leq Z$ و $\theta \leq \frac{\pi}{3}$ از عایقی با ضریب حساسیت $\chi_e = 3$ پر شده است. بار نقطه‌ای q در مبدأ مختصات قرار دارد که باعث قطبی شدگی این ناحیه خواهد شد. بار سطحی مقید در $Z = 3$ چند کولن است؟

$$(1) \frac{-3}{16}q \quad (2) \frac{-3}{8}q \quad (3) \frac{-1}{16}q \quad (4) \frac{3}{8}q$$

۸ - دوقطبی الکتریکی میکروسکوپی $\vec{p} = p\hat{z}$ در مبدأ مختصات قرار دارد کره‌ای فرضی به شعاع a و مرکز مبدأ مختصات را در نظر بگیرید شار الکتریکی عبوری از قسمتی از کره که در ناحیه $\theta \leq \frac{\pi}{3}$ قرار دارد، چند کولن است؟

$$(1) \frac{\sqrt{3}}{4}p \quad (2) \frac{3}{8}p \quad (3) \frac{\sqrt{3}}{8}p \quad (4) \frac{1}{8}p$$

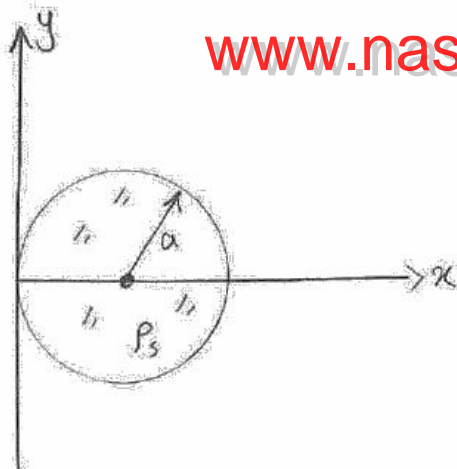
۹ - بر روی نیم کره‌ی $\theta \leq \frac{\pi}{2}$ ، $R = 1$ بار الکتریکی با چگالی یکنواخت ρ_s قرار دارد پتانسیل الکتریکی در نقطه $(R = 1, \theta = \pi, \phi = 0)$ کدام است؟

$$(1) \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \quad (2) \frac{\sqrt{2}\rho_s}{2\epsilon_0} \quad (3) \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4} \right) \quad (4) \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2} \right)$$

۱۰ - کره‌ای به شعاع a دارای بار حجمی با چگالی غیر یکنواخت $\rho = R^2$ به مرکز مبدأ مختصات مفروض است پتانسیل در مرکز کره کدام است؟ (مرجع پتانسیل را بینهایت در نظر بگیرید)

$$(1) \frac{3a^2}{4\epsilon_0} \quad (2) \frac{a^2}{4\epsilon_0} \quad (3) \frac{a^2}{5\epsilon_0} \quad (4) \frac{7a^2}{15\epsilon_0}$$

۱۱ - مطابق شکل زیر بار الکتریکی با چگالی سطحی یکنواخت ρ_s بر روی دیسکی به شعاع a توزیع شده است پتانسیل الکتریکی در مبدأ مختصات کدام است؟ (مرجع پتانسیل را بینهایت در نظر بگیرید)



www.nashr-estekhdam.ir

$$(1) \frac{\rho_s a}{\pi \epsilon_0}$$

$$(2) \frac{\rho_s a}{2\epsilon_0}$$

$$(3) \frac{\rho_s a}{\epsilon_0}$$

$$(4) \frac{2\rho_s a}{\epsilon_0}$$

۱۲- در مبدا مختصات دوقطبی های الکتریکی میکروسکوپی با بردار گشتاور های $p_1 = p\hat{x}$ و $p_2 = p\hat{y}$ مفروضند شدت میدان

الکتریکی در نقطه $(r = a, \phi = \frac{\pi}{6}, \circ)$ در مختصات استوانه ای کدام است

$$\frac{p}{16\pi\epsilon_0 a^2} \left((\Delta - 3\sqrt{3})\hat{a}_x + (3\sqrt{3} + 1)\hat{a}_y \right) \quad (1)$$

$$\frac{p}{16\pi\epsilon_0 a^2} \left((\Delta + 3\sqrt{3})\hat{a}_x + (3\sqrt{3} + 1)\hat{a}_y \right) \quad (2)$$

$$\frac{p}{16\pi\epsilon_0 a^2} \left((\Delta + 3\sqrt{3})\hat{a}_x + (3\sqrt{3} - 1)\hat{a}_y \right) \quad (3)$$

$$\frac{p}{16\pi\epsilon_0 a^2} \left((\Delta - 3\sqrt{3})\hat{a}_x + (3\sqrt{3} - 1)\hat{a}_y \right) \quad (4)$$

الکترومغناطیس

۱- گزینه «۱» صحیح است.

$$\vec{p} = \int \vec{P} dV = (P_0 \hat{z}) \frac{4\pi}{3} a^3$$

$$V = \frac{|p| \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 R^2} = \frac{\left(P_0 \frac{4\pi}{3} a^3 \right) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{4\pi \epsilon_0 (1)^2} = \frac{P_0 a^3}{6\epsilon_0}$$

۲- گزینه «۳» صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} V^+ &= \frac{\rho_s a}{2\epsilon_0} \\ V^- &= \frac{-2\rho_s a}{2\epsilon_0} = \frac{-\rho_s a}{\epsilon_0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow V = V^+ + V^- = \frac{-\rho_s a}{2\epsilon_0}$$

۳- گزینه «۴» صحیح است.

$$\vec{P}_Y = \epsilon_0 (\epsilon_{ry} - 1) \vec{E}_Y = \epsilon_0 \vec{E}_Y$$

$$D_{yn} = D_{in} \rightarrow \epsilon_0 \epsilon_{ry} E_{yx} = D_{in} \Rightarrow E_{yx} = \frac{D_{in}}{\epsilon_0 \epsilon_{ry}} = \frac{1}{2\epsilon_0}$$

$$E_{yt} = E_{rt} \rightarrow E_{rt} = \frac{D_{yt}}{\epsilon_{rt} \epsilon_0} \rightarrow \vec{E}_{rt} = \frac{1}{4\epsilon_0} (\hat{y} + \hat{z})$$

$$\vec{P}_Y = \left[\frac{1}{2} \hat{x} + \frac{1}{4} \hat{y} + \frac{1}{4} \hat{z} \right]$$

۴- گزینه «۳» صحیح است.

$$D = \begin{cases} 0 & R < a \\ \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r R^2} & a < R < 2a \\ \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^2} & 2a < R \end{cases}$$

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e = 5$$

$$V = \int_{\infty}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\infty}^{2a} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^2} dR + \int_{2a}^a \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r R^2} dR + \int_a^{\infty} 0 \cdot d\vec{\ell} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 (2a)} + \frac{Q}{2 \cdot \pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{a} \right) + 0 = \frac{19Q}{160 \pi \epsilon_0 a}$$

۵- گزینه «۲» صحیح است.

با توجه به رابطه $\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{in}$ و اینکه $Q_{in} = 0$ است می توان نتیجه گرفت که :

$$D = \cdot \Rightarrow \epsilon_0 E + P = \cdot \Rightarrow E = \frac{-P}{\epsilon_0} = \frac{-k}{\epsilon_0 r} \hat{r}$$

۶- گزینه «۳» صحیح است.

$$V = \int \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R}|} = \int \frac{\rho_s dS}{4\pi\epsilon_0 r} = \int \frac{r^\gamma r dr d\varphi}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{(\gamma\pi)}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b r^\gamma dr = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{a^\gamma}{\gamma} = \frac{a^\gamma}{2\epsilon_0}$$

۷- گزینه «۱» صحیح است.

$$\epsilon_r = 1 + \chi = 4$$

$$Q_{sb} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \varphi_D = -\frac{3}{4} \times \frac{q}{4} (1 - \cos 60^\circ) = \frac{-3}{16} q$$

۸- گزینه «۲» صحیح است.

$$\vec{D} = \frac{p}{4\pi R^\gamma} (\gamma \cos \theta \hat{a}_R + \sin \theta \hat{a}_\theta)$$

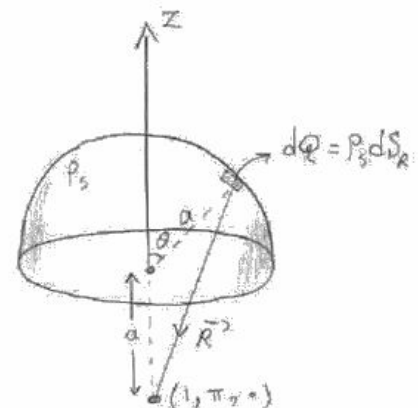
$$\varphi = \int \vec{D} \cdot d\vec{S}_R = \int \frac{p}{4\pi R^\gamma} \gamma \cos \theta \hat{a}_R \cdot \hat{a}_R R^\gamma \sin \theta d\theta d\varphi = \int \frac{p}{4\pi} \gamma \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{p}{\gamma} (\sin^\gamma \theta) \Big|_0^\pi = \frac{\gamma}{\lambda} p$$

۹- گزینه «۴» صحیح است.

$$|\vec{R}| = r \times 1 \sin\left(\frac{180^\circ - \theta}{\gamma}\right) = r \cos\left(\frac{\theta}{\gamma}\right), \quad dQ = \rho_s dS_R = \rho_s (1)^\gamma \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$V = \int \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R}|} = \int \frac{\rho_s (1)^\gamma \sin \theta d\theta d\varphi}{4\pi\epsilon_0 (r \cos(\frac{\theta}{\gamma}))} = \frac{\rho_s}{\gamma\epsilon_0} \int \sin(\frac{\theta}{\gamma}) d\theta$$

$$V = \frac{\rho_s}{\gamma\epsilon_0} \left(-\gamma \cos(\frac{\theta}{\gamma}) \right) \Big|_0^{180^\circ} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma} \right) = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \left(\frac{\gamma - \sqrt{\gamma}}{\gamma} \right)$$



۱۰- گزینه «۲» صحیح است.

$$V(R=a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

www.nashr-estekhdam.ir

$$Q = \int \rho dv = \int R^\gamma (R^\gamma \sin \theta dR d\theta d\varphi) = \left(\frac{R^\Delta}{\Delta} \right)^a (-\cos \theta)^\pi (\gamma\pi) = \frac{4\pi a^\Delta}{\Delta}$$

$$V(R=a) = \frac{\frac{4\pi a^\Delta}{\Delta}}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{a^\gamma}{\Delta\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{in} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{1}{R^\gamma} \frac{d(R^\gamma E_R)}{dR} = \frac{R^\gamma}{\epsilon_0} \Rightarrow R^\gamma E_R = \frac{R^\delta}{\delta \epsilon_0} + c$$

$$E(R = \cdot) = \cdot \Rightarrow c = \cdot$$

$$\vec{E} = \frac{R^\gamma}{\delta \epsilon_0} \hat{a}_R$$

$$V(R = \cdot) = V(R = a) + \left(- \int_a^\cdot \vec{E}_{in} \cdot d\vec{\ell} \right) = V(R = a) + \left(- \int_a^\cdot \frac{R^\gamma}{\delta \epsilon_0} \hat{a}_R \cdot \hat{a}_R dR \right) = V(R = a) + \left(\frac{a^\gamma}{\gamma \cdot \epsilon_0} \right)$$

$$V(R = \cdot) = \frac{a^\gamma}{\delta \epsilon_0} + \frac{a^\gamma}{\gamma \cdot \epsilon_0} = \frac{a^\gamma}{\gamma \epsilon_0}$$

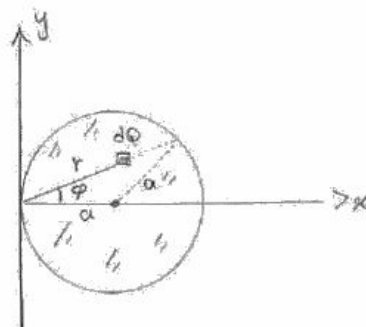
نکته: مسئله فوق را برای $\rho = R^n$ ($n > -2$) اگر تکرار نمایید جواب به صورت $V(R = \cdot) = \frac{a^{n+2}}{(n+2)\epsilon_0}$ خواهد شد

۱۱- گزینه «۱» صحیح است.

$$|\vec{R}| = r, \quad dQ = \rho_s dS = \rho_s r dr d\varphi$$

$$V = \int \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R}|} = \iint \frac{\rho_s r dr d\varphi}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\int_0^{2a \cos \varphi} dr \right) d\varphi$$

$$= \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int 2a \cos \varphi d\varphi = \frac{\rho_s a}{2\pi\epsilon_0} (\sin \varphi)_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{\rho_s a}{\pi\epsilon_0}$$



۱۲- گزینه «۳» صحیح است.

با توجه به رابطه شماره (۳-۱۰۳) صفحه ۲۰۱ کتاب الکترواستاتیستیک (دیوید گریفیث) میدان ناشی از یک دوقطبی الکتریکی مستقل از مختصات به صورت زیر است:

www.nashr-estekhdam.ir

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^\gamma} (\gamma(\vec{p} \cdot \hat{a}_R) \hat{a}_R - \vec{p})$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^\gamma} (\gamma(\vec{p} \cdot \hat{a}_r) \hat{a}_r - \vec{p}) \quad : \text{in xoy } R \rightarrow r$$

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^\gamma} ((\gamma(\vec{p}_1 \cdot \hat{a}_r) \hat{a}_r - \vec{p}_1) + (\gamma(\vec{p}_2 \cdot \hat{a}_r) \hat{a}_r - \vec{p}_2)) \quad [r = a, \varphi = \gamma]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a^\gamma} ((\gamma(p \cos \gamma)(\cos \gamma \hat{a}_x + \sin \gamma \hat{a}_y) - p \hat{a}_x) + (\gamma(p \sin \gamma)(\cos \gamma \hat{a}_x + \sin \gamma \hat{a}_y) - p \hat{a}_y))$$

$$= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 a^\gamma} \left(\left(\gamma \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma} \right) \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma} \hat{a}_x + \frac{1}{\gamma} \hat{a}_y \right) - \hat{a}_x \right) + \left(\gamma \left(\frac{1}{\gamma} \right) \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma} \hat{a}_x + \frac{1}{\gamma} \hat{a}_y \right) - \hat{a}_y \right) \right)$$

$$= \frac{p}{16\pi\epsilon_0 a^\gamma} ((\delta + \gamma\sqrt{\gamma}) \hat{a}_x + (\gamma\sqrt{\gamma} - 1) \hat{a}_y)$$

الکترومغناطیس

۱- در مختصات کروی بار الکتریکی با چگالی حجمی $\rho = 2r(1 + \cos\theta)\sin^2\varphi$ توزیع شده است. کل بار موجود درون کره ای به شعاع ۲ متر و به مرکز مبدا مختصات چند کولن است؟

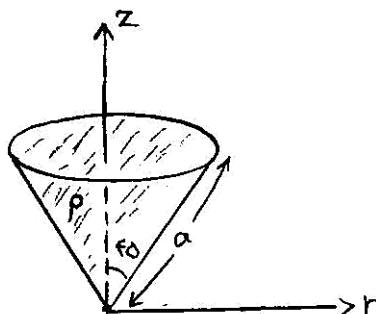
$$32\pi$$

$$32\pi$$

$$16\pi$$

$$8\pi$$

۲- مخروط شکل زیر دارای چگالی بار حجمی ρ می باشد. شدت میدان الکتریکی در راس مخروط کدام است؟



$$\frac{\rho a}{4\epsilon_0}(2 - \sqrt{2})$$

$$\frac{\rho a}{4\epsilon_0}(\sqrt{2} - 1)$$

$$\frac{\rho a}{4\epsilon_0}(2\sqrt{2} - 1)$$

$$\frac{\rho a}{4\epsilon_0}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

۳- کره ای دارای بار الکتریکی کل q است که به طور یکنواخت در حجم آن توزیع شده است. شار گذرنده از یک وجه مکعب فرضی که درون این کره محاط است، چند کولن است؟

$$\frac{q}{3\sqrt{3}\pi}$$

$$\frac{q}{6\pi}$$

$$\frac{q}{3\pi}$$

$$\frac{q}{6\sqrt{3}\pi}$$

۴- در ناحیه استوانه ای $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $|z| \leq a$ دو قطبی های میکروسکوپی با بردار گشتاور $p_0 \hat{z}$ و چگالی n در واحد حجم مفروض اند. شدت میدان الکتریکی در مبدا مختصات کدام است؟

$$\frac{np_0}{\epsilon_0}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\frac{np_0}{2\epsilon_0}(2 - \sqrt{2})$$

$$\frac{np_0}{\epsilon_0}\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\frac{np_0}{\epsilon_0}(2 - \sqrt{2})$$

۵- استوانه $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $|z| \leq h$ دارای قطبی شدگی $\vec{P} = P_0 \hat{z}$ می باشد. اگر این استوانه با سرعت زاویه ای ω حول محور z ها دوران کند، پتانسیل برداری مغناطیسی \vec{A} در فواصل دور R ($h, a \ll R$) با فاصله R چه رابطه ای دارد؟

$$A \propto \frac{1}{R^2}$$

$$A \propto \frac{1}{R^3}$$

$$A \propto \frac{1}{R^2}$$

$$A \propto \frac{1}{R}$$

۶- آهنربای دائمی با مغناطیس شدگی $M_0 \hat{z}$ با شعاع a و ارتفاع a را بر روی محور z ها در نظر بگیرید. حال اگر سیملوله ای با n دور در واحد طول به شعاع $2a$ و ارتفاع a هم محور با آهنربا قرار دهیم جهت و مقدار جریان سیملوله چطور باشد که شدت میدان مغناطیسی در مرکز آهنربا صفر گردد؟

$$\hat{\varphi} \text{ در جهت } \frac{M_0}{2n} \sqrt{\frac{17}{5}}$$

$$-\hat{\varphi} \text{ در جهت } \frac{M_0}{n}$$

$$-\hat{\varphi} \text{ در جهت } \frac{M_0}{2n} \sqrt{\frac{17}{5}}$$

$$\hat{\varphi} \text{ در جهت } \frac{M_0}{n}$$

۷ - استوانه‌ای به شعاع a و طول نامحدود با محور منطبق بر محور z ها به صورت $\vec{M} = M_0 \hat{z}$ مغناطیس شده است. بردار

پتانسیل مغناطیسی در $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$ کدام است؟

$$\mu_0 M_0 \hat{\phi} \quad (1) \quad \frac{1}{2} \mu_0 M_0 \hat{\phi} \quad (2) \quad \frac{1}{4} \mu_0 M_0 \hat{\phi} \quad (3) \quad \frac{1}{8} \mu_0 M_0 \hat{\phi} \quad (4)$$

۸ - کره‌ای به شعاع $a \ll 1$ به صورت $M_0 \hat{z}$ مغناطیس شده است. در این صورت نسبت اندازه چگالی شار مغناطیسی در

نقطه‌ی $(R=1, \phi=0, \theta=0)$ به اندازه‌ی چگالی شار مغناطیسی در نقطه‌ی $(R=2, \phi=0, \theta=\frac{\pi}{2})$ کدام است؟

$$2 \quad (1) \quad 4 \quad (2) \quad 8 \quad (3) \quad 16 \quad (4)$$

۹ - در فصل مشترک دو محیط مغناطیسی که $z=0$ می‌باشد، جریان سطحی $\vec{J}_S = 2\hat{x} + 3\hat{y}$ برقرار است. اگر در محیط

$z < 0$ که دارای $\mu_1 = 2$ شدت میدان مغناطیسی به صورت $H_1 = 4\hat{x} - 2\hat{y} + 2\hat{z}$ باشد. مطلوبست بردار مغناطیس‌شدگی

\vec{M}_2 در ناحیه $z > 0$ که دارای $\mu_2 = 5$ است.

$$4\hat{x} + 3/2\hat{z} \quad (1) \quad 28\hat{x} - 16\hat{y} + 3/2\hat{z} \quad (2)$$

$$28\hat{x} + 16\hat{y} + 3/2\hat{z} \quad (3) \quad 28\hat{x} + 3/2\hat{z} \quad (4)$$

۱۰ - دو قطبی مغناطیسی میکروسکوپی $m_0 \hat{y}$ واقع در مبدا مختصات مفروض است. بردار پتانسیل مغناطیس \vec{A} در فاصله‌ی a از

مبدأ و روی نیم‌ساز ربع دوم صفحه‌ی xoy کدام است؟

$$\frac{\mu_0 m_0 \sqrt{2}}{4\pi a^2} (\hat{x}) \quad (4) \quad \frac{\mu_0 m_0 \sqrt{2}}{4\pi a^2} (\hat{x}) \quad (3) \quad \frac{\mu_0 m_0 \sqrt{2}}{8\pi a^2} (\hat{z}) \quad (2) \quad \frac{\mu_0 m_0 \sqrt{2}}{8\pi a^2} (-\hat{z}) \quad (1)$$

۱۱ - استوانه‌ای طویل با شعاع a هم محور با محور z ها به صورت $\vec{M} = kr^2 \hat{\phi}$ مغناطیس شده است چگالی شار مغناطیسی \vec{B}

در فاصله‌ی $\frac{a}{\sqrt{2}}$ از محور استوانه کدام است؟

www.nashr-estekhdam.ir

$$\frac{1}{2} \mu_0 k_0 \hat{\phi} \quad (1) \quad \mu_0 k_0 \hat{\phi} \quad (2) \quad \frac{1}{4} \mu_0 k_0 \hat{\phi} \quad (3) \quad \text{صفر} \quad (4)$$

۱۲ - یک استوانه‌ی بی‌نهایت طویل به شعاع a به صورت $\vec{M} = kr \vec{a}_z$ مغناطیس شده است میدان مغناطیسی B در داخل

استوانه کدام است؟

$$\mu_0 kr \vec{a}_z \quad (1) \quad \text{صفر} \quad (2) \quad -\mu_0 kr \vec{a}_z \quad (3) \quad -\frac{1}{2} \mu_0 kr^2 \vec{a}_z \quad (4)$$

الکترومغناطیس

۱- گزینه «۲» صحیح است.

$$Q = \int_V \rho \, dV = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, dr$$

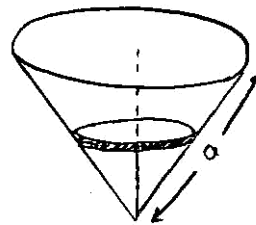
$$= \left(\frac{r^3}{3} - \frac{a^3}{3} \right) \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2} \int_0^R \left(\frac{r^3}{3} - \frac{a^3}{3} \right) \times \pi \, dr = \frac{1}{2} \left(\frac{R^4}{4} - \frac{a^4}{4} \right) \pi = \frac{\pi}{8} (R^4 - a^4)$$

۲- گزینه «۲» صحیح است.

$$\rho_s = \rho_l \sin\theta \quad \Rightarrow \quad \rho_s = \rho \frac{\sqrt{r}}{r}$$

$$D = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho \frac{\sqrt{r}}{\epsilon_0} = \frac{1}{r} \Rightarrow \rho = \frac{\sqrt{r}}{r} \epsilon_0$$

$$E = \frac{\rho(\sqrt{r}-1)}{\epsilon_0} R \Big|_0^a = \frac{(\sqrt{a}-1)}{\epsilon_0} \rho a$$



۳- گزینه «۴» صحیح است.

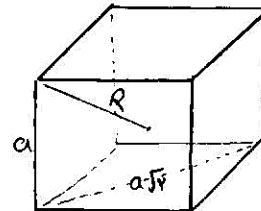
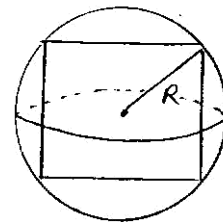
قطر مکعب = $\sqrt{3}R$

$$\sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3}R \Rightarrow \sqrt{3}a = \sqrt{3}R \Rightarrow a = \frac{R}{\sqrt{3}}$$

$$Q_{in} = \rho \times a^3$$

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow Q_{in} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \times \left(\frac{R}{\sqrt{3}} \right)^3 = \frac{q}{\pi\sqrt{3}}$$

$$\phi_D = \frac{Q_{in}}{\epsilon} = \frac{q}{3\sqrt{3}\pi}$$



۴- گزینه «۳» صحیح است.

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3$$

$$\rho_{\vec{P}} = \vec{P} \cdot \vec{P}$$

روی سطح جانبی استوانه $\rho_s = a \vec{P} \cdot \vec{e}_\phi$

روی قاعده بالایی استوانه $\rho_s = a \vec{P} \cdot \vec{e}_z$

روی قاعده پایینی استوانه $\rho_s = -a \vec{P} \cdot \vec{e}_z$

$$E_{cs \text{ deno}} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) \frac{\sqrt{r}}{r}$$

۵- گزینه «۳» صحیح است.

نتیجه قطبی شدگی به وجود آمدن دوبار مقید سطحی در قاعده بالایی و پایینی خواهد بود که وقتی با سرعت زاویه ای ω حول محور Z دوران کند نتیجه دو جریان چرخشی خواهد بود که هر کدام یک دوقطبی مغناطیسی خواهد بود که چون A در فواصل دور با فاصله رابطه $A \propto \frac{1}{R^{n+1}}$ دارد و n نیز از رابطه زیر بدست می آید ، خواهیم داشت :

$$\text{poles } r^n = r \Rightarrow n = 2 \Rightarrow A \propto \frac{1}{R^3}$$

۶- گزینه «۴» صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} B_l &= \mu_0 M_0 \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{\frac{a}{r}}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{r^2}}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ B_r &= \mu_0 n I \cos \beta \rightarrow \cos \beta = \frac{\frac{a}{r}}{\sqrt{r^2 a^2 + \frac{a^2}{r^2}}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow B_l = B_r \Rightarrow \mu_0 M_0 \cos \alpha = \mu_0 n I \cos \beta$$

$$I = \frac{M_0 \cos \alpha}{n \cos \beta} = \frac{M_0 \frac{1}{\sqrt{5}}}{n \frac{1}{\sqrt{17}}} = \frac{M_0 \sqrt{17}}{n \sqrt{5}}$$

و جهت جریان بایستی در جهت $-\hat{\phi}$ باشد

۷- گزینه «۳» صحیح است.

استوانه‌ی $M_0 \hat{z}$ همانند سولونوئید رفتار می‌کند $nI \sim M_0$

$$\vec{B} = \mu_0 M_0 \hat{z} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{a}_r & r\hat{a}_\phi & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & rA_\phi & 0 \end{vmatrix} \text{ داخل آهنربان}$$

$$\vec{B} = \mu_0 M_0 \hat{z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [rA_\phi] \hat{z} \Rightarrow rA_\phi = \frac{1}{r} \mu_0 M_0 r^2 + C$$

$$r=0 \Rightarrow C=0$$

$$A_\phi = \frac{1}{r} \mu_0 M_0 r \rightarrow \vec{A} \left(r = \frac{a}{r} \right) = \frac{1}{r} \mu_0 M_0 \hat{\phi}$$

www.nashr-estekhdam.ir

۸- گزینه «۴» صحیح است.

$$\vec{m} = \int \vec{M} dV = \int M_0 \hat{z} dV = M_0 \left[\frac{4\pi}{3} a^3 \right]$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 |m|}{4\pi R^3} [\gamma \cos \theta \vec{a}_R + \sin \theta \vec{a}_\theta]$$

$$\left. \begin{aligned} |B_\gamma| &= \left| \frac{\mu_0 |m|}{4\pi (\gamma)^3} \gamma \vec{a}_z \right| \\ |B_r| &= \left| \frac{\mu_0 |m|}{4\pi (\gamma)^3} (-\vec{a}_z) \right| \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{B_\gamma}{B_r} = \frac{\gamma}{\frac{1}{\gamma}} = \gamma^2 = 16$$

۹- گزینه «۲» صحیح است.

$$\vec{M}_r = (\mu_{r_1} - 1) \vec{H}_r = \epsilon \vec{H}_r$$

$$B_{1z} = B_{rz} \Rightarrow \mu_0 \mu_{r_1} H_{1z} = \mu_0 \mu_{r_1} H_{rz} \Rightarrow H_{rz} = \frac{\mu_{r_1}}{\mu_{r_2}} H_{1z} = \frac{2}{5} \times 2 = 0.8$$

$$H_{rt} = (\epsilon \hat{x} - \gamma \hat{y}) - \gamma \hat{y} + \gamma \hat{x} = -\epsilon \hat{y} + \gamma \hat{x}$$

$$H_r = -\epsilon \hat{y} + \gamma \hat{x} + 0.8 \hat{z}$$

$$\vec{M}_r = +2.8 \hat{x} - 1.6 \hat{y} + 3.2 \hat{z}$$

www.nashr-estekhdam.ir

۱۰- گزینه «۲» صحیح است.

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 |m|}{4\pi R^3} \sin(\epsilon \Delta) (+\hat{z}) = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi a^3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) (+\hat{z}) = \left[\frac{\mu_0 m_0 \sqrt{2}}{4\pi a^3} \right] \hat{z}$$

۱۱- گزینه «۳» صحیح است.

$$\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \vec{a}_r & r\vec{a}_\phi & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & kr^\gamma & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (kr^\gamma) \hat{z} = (\gamma kr) \hat{z}$$

$$\vec{J}_{sb}(r=a) = \vec{M} \times \vec{a}_r = ka^\gamma \hat{a}_\phi \times \hat{a}_r = -ka^\gamma \vec{a}_z$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{in} \Rightarrow B_{in}(\gamma \pi r) = \mu_0 I_{in}$$

$$I_{in} = \int_0^r (\gamma kr) r dr d\phi = \gamma \pi k r^\gamma$$

$$B_{in}(\gamma \pi r) = \mu_0 \gamma \pi k r^\gamma \Rightarrow \vec{B}_{in} = \mu_0 k r^\gamma \hat{\phi} \Rightarrow B\left(r = \frac{a}{\gamma}\right) = \frac{1}{\gamma} \mu_0 k \hat{\phi}$$

۱۲- گزینه «۱» صحیح است.

طبق رابطه $\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{in}$ چون مجموع جریان‌های داخل استوانه صفر است (چرا؟)

$H_{out} = 0$ می‌شود در نتیجه $H_{in} = 0$ خواهد شد $[H_{1t} = H_{2t}]$ پس:

$$\vec{B} = \mu_0 [\vec{M} + \vec{H}] \Rightarrow \vec{B}_{in} = \mu_0 \vec{M} = \mu_0 k r \vec{a}_z$$

الکترومغناطیس

۱ - حلقه‌ای دایروی به شعاع a و دارای جریان I_1 و به مرکز مبدأ مختصات که در صفحه‌ی xoy قرار گرفته است، به حلقه‌ی دیگری به شعاع b و دارای جریان I_2 در صفحه‌ی xoy که مرکز آن در نقطه‌ی $(x, y, z) = (d, d, 0)$ قرار دارد، چه نیرویی وارد می‌کند؟ ($a, b \ll d$)

$$\frac{3\mu_0 \pi I_1 I_2 a^2 b^2}{16 d^4} \quad (2) \quad \frac{3\mu_0 \pi I_1 I_2 a^2 b^2}{8 d^4} \quad (1)$$

$$\frac{3\mu_0 I_1 I_2 a^2 b^2}{16 d^4} \quad (4) \quad \frac{3\mu_0 I_1 I_2 a^2 b^2}{8 d^4} \quad (3)$$

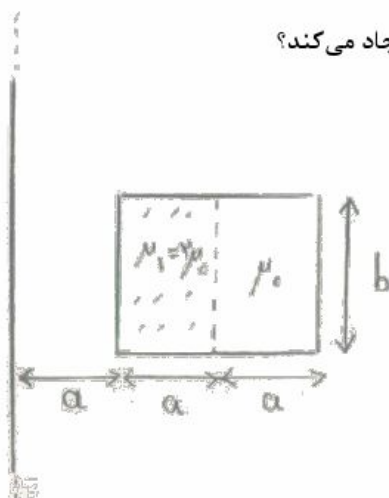
۲ - مرکز آهنربایی استوانه‌ای به ارتفاع h و شعاع مقطع a با مغناطیس‌شدگی یکنواخت $M_0 \hat{z}$ در مبدأ مختصات قرار دارد. شار

مغناطیس عبوری از نیم کره‌ی $R = b$ و $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ کدام است؟

$$\frac{\mu_0 M_0 \pi a^2 h}{b} \quad (2) \quad \frac{\mu_0 M_0 \pi a^2 h}{2b} \quad (1)$$

$$\frac{\mu_0 M_0 a^2 h}{b} \quad (4) \quad \frac{\mu_0 M_0 a^2 h}{2b} \quad (3)$$

۳ - در شکل زیر سیم نامحدود در مجاورت حلقه سیم مستطیل شکل چه اندوکتانس متقابلی ایجاد می‌کند؟



$$\frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln(2) \quad (1)$$

$$\frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln(3) \quad (2)$$

$$\frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(\frac{3}{2}\right) \quad (3)$$

$$\frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln(6) \quad (4)$$

۴ - اندوکتانس در واحد طول متقابل بین دو سیم‌لوله هم محور به شعاع‌های a و $2a$ و هر یک دارای n دور سیم در واحد طول، کدام است؟

$$\frac{1}{2} \mu_0 n^2 \pi a^2 \quad (4) \quad \mu_0 n^2 \pi a^2 \quad (3) \quad 2 \mu_0 n^2 \pi a^2 \quad (2) \quad 4 \mu_0 n^2 \pi a^2 \quad (1)$$

۵ - در سطح کره‌ای به شعاع a جریان سطحی $\vec{K} = K_0 \sin \theta \hat{a}_\phi$ برقرار شده است. انرژی مغناطیسی ذخیره شده در خارج کره کدام است؟

$$\frac{\pi \mu_0 K_0^2 a^3}{27} \quad (2) \quad \frac{4\pi \mu_0 K_0^2 a^3}{27} \quad (1)$$

$$\frac{\pi \mu_0 K_0^2 a^3}{9} \quad (4) \quad \frac{\pi \mu_0 K_0^2 a^3}{12} \quad (3)$$

۶ - کره‌ای به شعاع a به صورت $M_0 \hat{z}$ مغناطیس شده است. انرژی مغناطیسی داخل کره کدام است؟

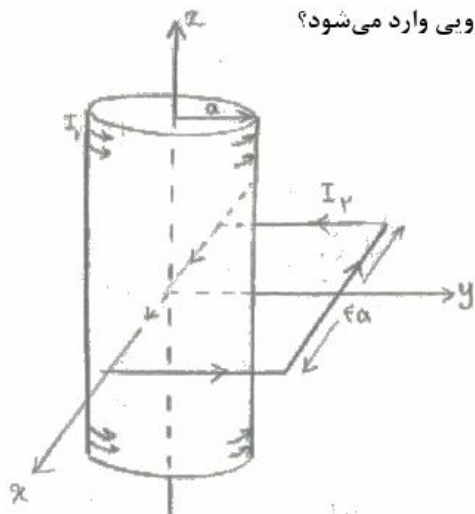
$$(1) \frac{8\pi\mu_0 M_0^2 a^3}{27}$$

$$(2) \frac{4\pi\mu_0 M_0^2 a^3}{27}$$

$$(3) \frac{16\pi\mu_0 M_0^2 a^3}{27}$$

$$(4) \frac{\pi\mu_0 M_0^2 a^3}{27}$$

۷ - سیم‌لوله‌ای طویل به شعاع a دارای n دور سیم به هم فشرده در واحد طول می‌باشد که در آن جریان I_1 برقرار شده است اگر محور سیم‌لوله در راستای محور z ها باشد، بر حلقه‌ی مربعی شکل زیر به ضلع $4a$ چه نیرویی وارد می‌شود؟



$$(1) 4a\mu_0 n I_1 I_2 \vec{a}_y$$

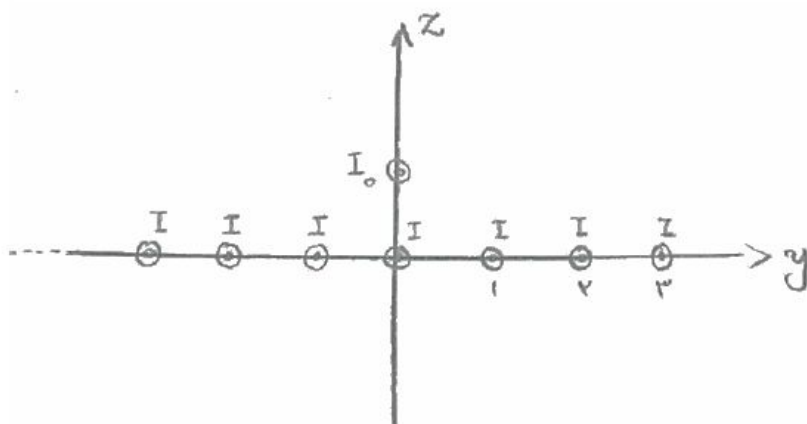
$$(2) 2a\mu_0 n I_1 I_2 \vec{a}_y$$

$$(3) -4a\mu_0 n I_1 I_2 \vec{a}_y$$

$$(4) -2a\mu_0 n I_1 I_2 \vec{a}_y$$

www.nashr-estekhdam.ir

۸ - تعداد نامحدودی سیم با طول نامحدود با جریان یکسو I به صورت موازی روی محور y ها در نقاط $y = n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) به یک سیم نامحدود دیگر در صفحه‌ی xoz به موازات محور x ها و در $z = 1$ با جریان I_0 در جهت x ها، چه نیرویی وارد می‌کنند؟



$$(1) \frac{\mu_0 I I_0}{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2 + 1} \right] \right]$$

$$(2) \frac{\mu_0 I I_0}{2\pi} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2 + 1} \right] \right]$$

$$(3) \frac{\mu_0 I I_0}{\pi} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2 + 1} \right] \right]$$

$$(4) \frac{\mu_0 I I_0}{\pi} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2 + 1} \right] \right]$$

۹ - کابل هم محوری به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b و طول زیاد دارای چه اندوکتانس خودی در واحد طول می‌باشد؟

$$(1) \frac{\mu_0}{4\pi} \left[1 - \frac{2a^2}{(b^2 - a^2)} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]$$

$$(2) \frac{\mu_0}{4\pi} \left[1 - \frac{a^2}{(b^2 - a^2)} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]$$

$$(3) \frac{\mu_0}{4\pi} \left[1 + \frac{a^2}{(b^2 - a^2)} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]$$

$$(4) \frac{\mu_0}{16\pi} \left[1 + \frac{a^2}{(b^2 - a^2)} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]$$

۱۰ - استوانه‌ای طویل به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b به صورت $\vec{p} = \frac{2}{r} \vec{a}_r$ [در مختصات استوانه‌ای] قطبیده شده است. این

استوانه را حول محور z با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌دهیم. انرژی مغناطیسی در واحد طول استوانه کدام است؟

$$(1) \quad 4\mu_0 \pi \omega^2 (b^2 - a^2) \quad (2) \quad \frac{1}{4} \mu_0 \pi \omega^2 (b^2 - a^2)$$

$$(3) \quad 2\mu_0 \pi \omega^2 (b^2 - a^2) \quad (4) \quad \frac{1}{8} \mu_0 \pi \omega^2 (b^2 - a^2)$$

۱۱ - در ناحیه‌ای از فضا بردار پتانسیل مغناطیسی به صورت $\vec{A} = A_0 \cos(\omega t) \hat{\phi}$ مفروض است. شدت میدان الکتریکی چرخان

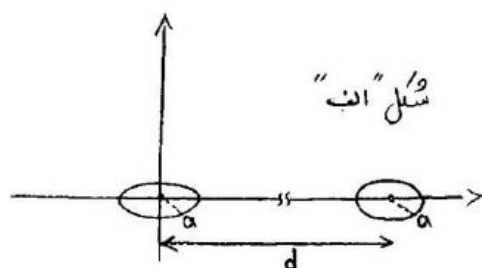
در این ناحیه لحظه‌ای $t = \frac{\pi}{6\omega}$ کدام است؟

$$(1) \quad \frac{1}{2} A_0 \omega \hat{\phi} \quad (2) \quad -\frac{1}{2} A_0 \omega \hat{\phi} \quad (3) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} A_0 \hat{\phi} \quad (4) \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} A_0 \hat{\phi}$$

۱۲ - دو حلقه دایره‌ای به شعاع a یک بار به صورت شکل «الف» به صورت هم صفحه در کنار یکدیگر و در فاصله‌ی d ($a \ll d$) از

هم قرار می‌گیرند و بار دیگر مطابق شکل «ب» به صورت موازی و هم محور در فاصله‌ی $2d$ از هم قرار می‌گیرند نسبت

اندوکتانس متقابل در حالت «ب» چند برابر اندوکتانس حالت «الف» می‌باشد؟



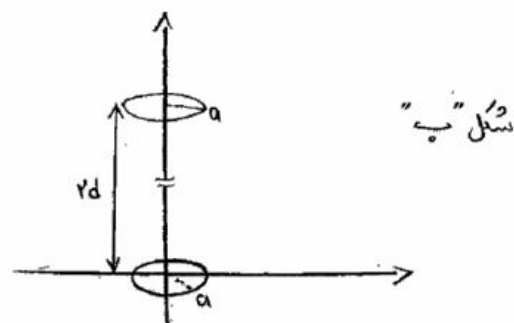
(1) 2

(2) 4

(3) $\frac{1}{2}$

www.nashr-estekhdam.ir

(4) $\frac{1}{4}$



الکترومغناطیس

۱- گزینه «۲» صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} |F| &= \frac{\mu_0 m_1 m_2}{4\pi (\sqrt{r}d)^2} \\ m_1 &= I_1 (\pi a^2) \\ m_2 &= I_2 (\pi b^2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow F = \frac{\mu_0 \pi I_1 I_2 a^2 b^2}{16 d^2}$$

۲- گزینه «۱» صحیح است.

$$\begin{aligned} \vec{m} &= \int \vec{M} dV = M_0 (\pi a^2) h \hat{z} \\ (R=b), : \vec{B} &= \frac{\mu_0 |\vec{m}|}{4\pi b^3} [\gamma \cos \theta \vec{a}_R + \sin \theta \vec{a}_\theta] \\ \Phi_m &= \int \vec{B} \cdot d\vec{S}_R = \int \frac{\mu_0 |\vec{m}|}{4\pi b^3} (\gamma \cos \theta \vec{a}_R + \sin \theta \vec{a}_\theta) \cdot \vec{a}_R b^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{\mu_0 |\vec{m}|}{4\pi b} \int \gamma \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi = \frac{\mu_0 |\vec{m}|}{\gamma b} \left[\sin^2 \theta \right]_0^\pi = \frac{\mu_0 |\vec{m}|}{\gamma b} = \frac{\mu_0 M_0 \pi a^2 h}{\gamma b} \end{aligned}$$

۳- گزینه «۴» صحیح است.

$$\begin{aligned} H_{1\phi} &= H_{2\phi} \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi r} \vec{a}_\phi \\ B_1 &= \frac{\mu_1 I}{2\pi r}, \quad B_2 = \frac{\mu_2 I}{2\pi r} \\ \Phi_1 &= \int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = \int \frac{\gamma \mu_0 I}{2\pi r} (b dr) = \frac{\gamma \mu_0 I b}{2\pi} \ln r \Big|_a^{\gamma a} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \gamma \\ \Phi_2 &= \int_{S_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi r} b dr = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln r \Big|_a^{\gamma a} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \left[\frac{\gamma}{2} \right] \\ \Phi_T &= \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \left[\gamma \times \frac{\gamma}{2} \right] = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln(\gamma) \\ M &= \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln(\gamma) \end{aligned}$$

www.nashr-estekhdam.ir

۴- گزینه «۳» صحیح است.

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_0 n I \quad \text{عبوری از فصل مشترک} \\ \Phi_{12} &= |B| (\pi a^2) = (\mu_0 n I) \pi a^2 \quad \text{شار عبوری از فصل مشترک} \\ L_{12} &= \frac{N_1 \Phi_{12}}{I} = \frac{(n\ell) (\mu_0 n I \pi a^2)}{I} \\ \frac{L_{12}}{\ell} &= \mu_0 n^2 \pi a^2 \end{aligned}$$

۵- گزینه «۱» صحیح است.

$$\begin{aligned}
 K_o \sim M_o &\Rightarrow \vec{m} \cancel{M_o} \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{r} a^r \right) \hat{z} = K_o \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{r} a^r \right) \hat{z} \\
 \vec{B} &= \frac{\mu_o |\vec{m}|}{\sqrt{3}\pi R^r} (r \cos \theta \vec{a}_R + \sin \theta \vec{a}_\theta) \\
 W_m &= \frac{1}{r\mu_o} |B|^r = \frac{\mu_o |m|^r}{r^2 \pi^r R^r} (r \cos^r \theta + \sin^r \theta) = \frac{\mu_o |m|^r}{r^2 \pi^r R^r} (r \cos^r \theta + 1) \\
 W &= \int W_m dV = \int \frac{\mu_o |m|^r}{r^2 \pi^r R^r} (r \cos^r \theta + 1) R^r \sin \theta dR d\theta d\phi \\
 &= \frac{\mu_o |m|^r}{r^2 \pi^r} (r\pi) \int \frac{1}{R^r} (r \cos^r \theta \sin \theta + \sin \theta) dR d\theta \\
 &= \frac{\mu_o |m|^r}{16\pi} \left[\frac{-1}{rR^r} \right]_a^\infty (-\cos^r \theta - \cos \theta)^\pi = \frac{\mu_o |m|^r}{12\pi a^r} \\
 &= \frac{\mu_o K_o^r (\sqrt{3}\pi)^r a^r}{9 \times 12\pi a^r} = \frac{\sqrt{3}\pi \mu_o K_o^r a^r}{27}
 \end{aligned}$$

۶- گزینه «۱» صحیح است.

$$\begin{aligned}
 \vec{J}_m &= \vec{\nabla} \times \vec{M} = 0 \\
 \vec{J}_{ms} &= \vec{M} \times \vec{a}_n = M_o \vec{a}_z \times \vec{a}_R = M_o \sin \theta \vec{a}_\phi \\
 \vec{B} &= \int \frac{\mu_o \vec{J}_{ms} dS \times \vec{R}}{\sqrt{3}\pi |\vec{R}|^r} = \int \frac{\mu_o M_o \sin \theta a^r \sin \theta d\theta d\phi}{\sqrt{3}\pi a^r} \vec{a}_\phi \times (-a \vec{a}_R) \\
 &= \frac{\mu_o M_o}{\sqrt{3}\pi} \int \sin^r \theta (-\vec{a}_\theta) d\theta d\phi \\
 &= \frac{\mu_o M_o}{\sqrt{3}\pi} \int -\sin^r \theta \left(\cos \theta \vec{a}_r - \sin \theta \vec{a}_z \right) d\theta d\phi = \frac{\mu_o M_o}{\sqrt{3}\pi} r\pi \int_0^\pi \sin^r \theta d\theta \vec{a}_z = \frac{\sqrt{3}\mu_o M_o}{3} \vec{a}_z
 \end{aligned}$$

نکته: بدانید که B در داخل چنین کره‌ای در همه جا یکسان و برابر با مرکز کره است.

$$\begin{aligned}
 W_m &= \frac{1}{r\mu_o} \frac{\sqrt{3}\mu_o^r M_o^r}{9} = \frac{\sqrt{3}\mu_o^r M_o^r}{9} \\
 W &= \int W_m dV = \left(\frac{\sqrt{3}\mu_o M_o^r}{9} \right) \frac{\sqrt{3}\pi}{r} a^r = \frac{\sqrt{3}\pi \mu_o M_o^r a^r}{27}
 \end{aligned}$$

۷- گزینه «۴» صحیح است.

$$\begin{aligned}
 \vec{B}_{in} &= \sqrt{3}\mu_o n I_1 \hat{a}_z \\
 \vec{B}_{out} &= 0 \\
 F &= I_1 \ell \times \vec{B}_{in} = I_1 (ra) B_{in} = -\mu_o n I_1 I_1 (ra) \vec{a}_y
 \end{aligned}$$

۸- گزینه «۱» صحیح است.

$$F_{nT} = \frac{\mu_o I I_o}{2\pi r} \cos \alpha = \frac{\mu_o I I_o}{2\pi} \frac{1}{r^2} = \frac{\mu_o I I_o}{2\pi} \frac{1}{n^2 + 1}$$

$$F_T = F_o + \sum_{n=1}^{\infty} F_{nT} = \frac{\mu_o I I_o}{2\pi} + \frac{\mu_o I I_o}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

۹- گزینه «۲» صحیح است.

$$B(r) = \frac{\mu_o I_{in}}{2\pi r} = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{\left(\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right) I}{r} = \frac{\mu_o I}{2\pi (b^2 - a^2)} \left[r - \frac{a^2}{r} \right]$$

$$\varphi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int \frac{\mu_o I}{2\pi (b^2 - a^2)} \left(r - \frac{a^2}{r} \right) dr dz$$

$$= \frac{\mu_o I \ell}{2\pi (b^2 - a^2)} \left[\frac{r^2}{2} - a^2 \ln r \right]_a^b = \frac{\mu_o I \ell}{2\pi (b^2 - a^2)} \left[(b^2 - a^2) - 2a^2 \ln \left(\frac{b}{a} \right) \right]$$

$$\frac{L_{11}}{\ell} = \frac{\varphi}{I \ell} = \frac{\mu_o}{2\pi (b^2 - a^2)} \left[b^2 - a^2 - 2a^2 \ln \left(\frac{b}{a} \right) \right]$$

۱۰- گزینه «۳» صحیح است.

$$\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \frac{-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{r}{r} \right] = 0$$

$$r = a \quad \rho_{sb}^- = \vec{P} \cdot \vec{a}_n = \frac{r}{a} \vec{a}_r \cdot (-\vec{a}_r) = \frac{-r}{a} \rightarrow \vec{J}_s^- = \rho_{sb}^- r \omega \vec{a}_\varphi|_{r=a} = \frac{-r}{a} a \omega \vec{a}_\varphi = -r \omega \vec{a}_\varphi$$

$$r = b \quad \rho_{sb}^+ = \vec{P} \cdot \vec{a}_n = \frac{r}{b} \vec{a}_r \cdot (+\vec{a}_r) = \frac{r}{b} \rightarrow \vec{J}_s^+(r=b) = +r \omega \vec{a}_\varphi$$

$$B(r < a) = B^- + B^+ = \mu_o |J_s^-| \vec{a}_z + \mu_o |I_s^+| \vec{a}_z = 0$$

$$B(a < r < b) = B^+ = \mu_o |I_s| \vec{a}_z = r \mu_o \omega \vec{a}_z$$

$$B(r > b) = 0$$

$$w_m = \frac{1}{2\mu_o} |B|^2 = r \mu_o \omega^2$$

$$W_T = \int \omega_m dV = (r \mu_o \omega^2) \left(\pi (b^2 - a^2) \right) \ell \Rightarrow \frac{W_T}{\ell} = r \mu_o \pi \omega^2 (b^2 - a^2)$$

۱۱- گزینه «۱» صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\ B &= \nabla \times A \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla \times E = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times A) = \nabla \times \left(-\frac{\partial A}{\partial t} \right)$$

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t} = A_o \omega \sin(\omega t) \hat{\varphi} \bigg|_{t=\frac{\pi}{\omega}} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{r} A_o \omega \hat{\varphi}$$

$$L_{1r} \times \varphi_{1r} \times B_{1r} \Rightarrow \frac{(L_{1r})_B}{(L_{1r})_A} = \frac{(B_{1r})_B}{(B_{1r})_A} = \frac{1}{4}$$

$$(B_{1r})_B = \frac{\mu_o |m|}{4\pi(rd)^3} [r\hat{a}_z]$$

$$(B_{1r})_A = \frac{\mu_o |m|}{4\pi(d)^3} [-\hat{a}_z]$$

www.nashr-estekhdam.ir

الکترومغناطیس

- ۱ - صفحات یک خازن مسطح با صفحات بزرگ در $Z = 0$ و $Z = d$ قرار گرفته اند. در صورتیکه ضریب نفوذپذیری فضای بین دو صفحه به $\epsilon = \epsilon_0 (1 + (\frac{Z}{d})^2)$ باشد، اگر ولتاژ در $Z = 0$ صفر ولت و در $Z = d$ برابر با V_0 باشد در این صورت شدت میدان الکتریکی در این ناحیه کدام است؟

$$(1) \hat{z} \frac{4V_0 d}{\pi(Z^2 + d^2)} \quad (2) \hat{z} \frac{2V_0 d}{\pi(Z^2 + d^2)} \quad (3) \hat{z} \frac{V_0 d}{\pi(Z^2 + d^2)} \quad (4) \hat{z} \frac{V_0 d}{4\pi(Z^2 + d^2)}$$

- ۲ - یک پوسته کروی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی $4a$ به مرکز مبدا مختصات مفروض است. اگر کره داخلی به پتانسیل V_0 و کره خارجی به پتانسیل صفر وصل شود و فضای بین دو کره از ماده ای با رسانایی $\sigma = \frac{\sigma_0}{R}$ اشغال شده باشد. چگالی جریان الکتریکی در ناحیه بین دو پوسته کدام است؟

$$(1) \vec{J} = \frac{\sigma_0 V_0}{\ln(4) R^2} \vec{a}_R \quad (2) \vec{J} = \frac{\sigma_0 V_0}{\ln(2) R^2} \vec{a}_R \quad (3) \vec{J} = \frac{\sigma_0 V_0}{4R^2} \vec{a}_R \quad (4) \vec{J} = \frac{\sigma_0 V_0}{2R^2} \vec{a}_R$$

www.nashr-estekhdam.ir

- ۳ - دو پوسته کروی رسانای هم مرکز به شعاع های a و $4a$ به زمین متصل شده اند و بار نقطه ای c بین آن دو و در فاصله $R = 2a$ واقع شده است. بار القایی بر روی کره بزرگتر کدام است؟

$$(1) \frac{-1}{3} c \quad (2) \frac{-2}{3} c \quad (3) \frac{-3}{5} c \quad (4) \frac{-4}{5} c$$

- ۴ - کره ای رسانا به شعاع a و پتانسیل V_0 در فضای خلا قرار دارد. اگر کره از منبع جدا کنیم و در فضایی با ضریب گذردهی $\epsilon = \epsilon_0 (1 + \frac{a}{R}) \sin \theta (1 + \cos \varphi)$ قرار دهیم، پتانسیل کره چند برابر خواهد شد؟

$$(1) 2 \ln(2) \quad (2) \ln(2) \quad (3) 2\pi \ln(2) \quad (4) \frac{2}{\pi} \ln(2)$$

- ۵ - انرژی ذخیره شده در واحد طول پوسته استوانه ای طویل با شعاع داخلی a و خارجی $2a$ که دارای چگالی بار حجمی $\rho = r$ در فضای خالی کدام است؟

$$(1) \frac{\pi a^5}{54 \epsilon_0} \quad (2) \frac{\pi a^6}{54 \epsilon_0} \quad (3) \frac{\pi a^6}{9 \epsilon_0} \quad (4) \frac{\pi a^5}{9 \epsilon_0}$$

- ۶ - ناحیه $1 \leq r \leq 2$ و $0 \leq \varphi < 2\pi$ از ماده ای با ضریب هدایت $\sigma = \sigma_0 (1 + \frac{1}{r})(1 + \cos^2 \varphi)$ پر شده است. مقاومت الکتریکی بین صفحات $Z = 0$ و $Z = 1$ کدام است؟

$$(1) R = \frac{1}{20 \sigma_0} \quad (2) R = \frac{1}{30 \sigma_0} \quad (3) R = \frac{1}{10 \sigma_0} \quad (4) R = \frac{3}{40 \sigma_0}$$

۷ - یک دو قطبی الکتریکی میکروسکوپی با بردار گشتاور $\vec{p} = p_0 \hat{z}$ در مبداء مختصات قرار گرفته است. اگر بار q را از نقطه $(r = 4, \theta = \frac{\pi}{6}, \phi = 0)$ به نقطه $(r = 2, \theta = \frac{\pi}{3}, \phi = \frac{\pi}{2})$ منتقل کنیم چقدر کار انجام داده ایم؟

$$\frac{p_0 q}{128 \pi \epsilon_0} (4 - \sqrt{3}) \quad (1)$$

$$\frac{p_0 q}{64 \pi \epsilon_0} (2\sqrt{2} + \sqrt{3}) \quad (2)$$

$$\frac{p_0 q}{96 \pi \epsilon_0} (4\sqrt{3} - 2) \quad (3)$$

$$\frac{p_0 q}{64 \pi \epsilon_0} (4\sqrt{3} - 1) \quad (4)$$

۸ - دو استوانهٔ فنروی هادی بلند به شعاع‌های a_1 و a_2 به موازات یکدیگر و به فاصلهٔ x از هم قرار دارند. اگر فاصلهٔ x نسبت به شعاع‌های a_1 و a_2 بزرگ باشد ظرفیت خازن ایجاد شده برای واحد طول استوانه‌ها برابر است با: $C = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln \frac{x}{\sqrt{a_1 a_2}}}$ ، اندازهٔ نیروی

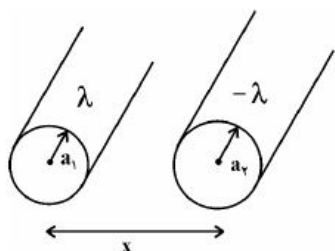
در واحد طول که هر یک از استوانه‌ها به دیگری وارد می‌کند، کدام است؟

$$\frac{\lambda^2}{\pi \epsilon_0} \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{x^2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\pi \epsilon_0} \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{x^2} \quad (2)$$

$$\frac{\lambda^2}{\pi \epsilon_0} \frac{1}{x} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\pi \epsilon_0} \frac{1}{x} \quad (4)$$



www.nashr-estekhdam.ir

۹ - بارهای سطحی یکنواخت ρ_{s1}, ρ_{s2} به ترتیب روی سطوح دو کره متحدالمرکز به شعاع‌های a, b ($b > a$) مفروض هستند. انرژی الکتریکی متقابل را بدست آورید؟

$$\frac{4\pi \rho_{s1} \rho_{s2} b^2 a}{\epsilon_0} \quad (4)$$

$$\frac{4\pi a^2 b^2 \rho_{s1} \rho_{s2}}{\epsilon_0} \quad (3)$$

$$\frac{2\pi a b^2 \rho_{s1} \rho_{s2}}{\epsilon_0} \quad (2)$$

$$\frac{4\pi a^2 b \rho_{s1} \rho_{s2}}{\epsilon_0} \quad (1)$$

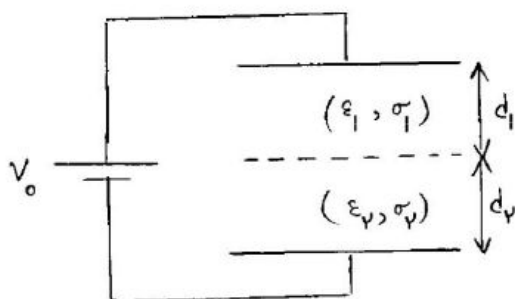
۱۰ - یک خازن مسطح از دو صفحه هادی موازی که به فاصله d از هم قرار دارند تشکیل شده است. بین خازنها مطابق شکل از دو ماده ۱ و ۲ پر شده است. ماده اول دارای مشخصات (ϵ_1, σ_1) و ماده دوم دارای (ϵ_2, σ_2) می باشد. اگر دو سر خازن ولتاژ V_0 قرار گیرد. چگالی بار سطحی آزاد که در فصل مشترک تشکیل می شود، کدام است؟

$$\rho_s = 0 \quad (1)$$

$$\rho_s = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1} V_0 \quad (2)$$

$$\rho_s = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1} V_0 \quad (3)$$

$$\rho_s = \frac{\epsilon_2 \sigma_1 - \epsilon_1 \sigma_2}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1} V_0 \quad (4)$$



۱۱- کره ای رسانا به شعاع a دارای پتانسیل V_0 می باشد این کره در فضایی با رسانایی $\sigma = \sigma_0 \left(1 + \frac{a}{r}\right)$ قرار دارد تابع پتانسیل الکتریکی در برون کره کدام است؟ (مرجع پتانسیل را بینهایت بگیرید)

$$\begin{aligned} (1) \quad & V_0 \frac{\ln\left(\frac{r+a}{r}\right)}{\ln(2)} \quad (2) \quad V_0 \frac{r+a}{r^2} \quad (3) \quad V_0 \ln\left(\frac{r+a}{r}\right) \quad (4) \quad V_0 \ln\left(\frac{r+a}{r^2}\right) \end{aligned}$$

۱۲- در مختصات گوی ناحیه $a \leq r \leq b$ از ماده ای با مشخصات (ϵ_1, σ_1) و ناحیه $b \leq r \leq c$ از ماده ای با مشخصات (ϵ_2, σ_2) پر شده است بار الکتریکی Q را در $t = 0$ روی سطح $r = b$ قرار داده میشود کدام گزینه جگالی جریان الکتریکی را در این نواحی به درستی نشان می دهد؟

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{cases} J_1 = \frac{\sigma_1 Q e^{\frac{-\sigma_1 t}{\epsilon_1}}}{4\pi\epsilon_1 r^2} \hat{a}_r \\ J_2 = \frac{\sigma_2 Q e^{\frac{-\sigma_2 t}{\epsilon_2}}}{4\pi\epsilon_2 r^2} \hat{a}_r \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} J_1 = -\frac{\sigma_1 Q e^{\frac{-\sigma_1 t}{\epsilon_1}}}{4\pi\epsilon_1 r^2} \hat{a}_r \\ J_2 = \frac{\sigma_2 Q e^{\frac{-\sigma_2 t}{\epsilon_2}}}{4\pi\epsilon_2 r^2} \hat{a}_r \end{cases} \end{aligned}$$

www.nashr-estekhdam.ir

$$\begin{aligned} (3) \quad & \begin{cases} J_1 = \frac{\sigma_2 Q e^{\frac{-\sigma_2 t}{\epsilon_2}}}{4\pi\epsilon_2 r^2} \hat{a}_r \\ J_2 = \frac{\sigma_1 Q e^{\frac{-\sigma_1 t}{\epsilon_1}}}{4\pi\epsilon_1 r^2} \hat{a}_r \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} J_1 = 0 \\ J_2 = \frac{\sigma_2 Q e^{\frac{-\sigma_2 t}{\epsilon_2}}}{4\pi\epsilon_2 r^2} \hat{a}_r \end{cases} \end{aligned}$$

۱- گزینه «۱» صحیح است.

$$dc = \frac{\epsilon A}{dz} = \frac{\epsilon_0 (d^y + z^y) A}{d^y dz}$$

$$\int \frac{dz}{z^y + d^y} = \frac{1}{d} \tan^{-1} \left(\frac{z}{d} \right) \Big|_z = \frac{1}{d} \tan^{-1} \left(\frac{z}{d} \right)$$

$$C(z) = \frac{\epsilon_0 A}{d^y \left(\frac{1}{d} \tan^{-1} \left(\frac{z}{d} \right) \right)} \Rightarrow C \propto \frac{1}{\tan^{-1} \left(\frac{z}{d} \right)}$$

$$V \propto \frac{1}{C} \Rightarrow V \propto \tan^{-1} \left(\frac{z}{d} \right)$$

$$\frac{V(z)}{V(d)} = \frac{\tan^{-1} \left(\frac{z}{d} \right)}{\tan^{-1}(1)}$$

$$V(z) = \frac{\varphi V_0}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{z}{d} \right) \Rightarrow E = -\nabla V = -\frac{\varphi V_0}{\pi} \frac{d}{(d^y + z^y)} \hat{z}$$

۲- گزینه «۱» صحیح است.

$$\vec{J} = \frac{I}{\varphi \pi R^y} \vec{a}_R \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \frac{I}{\varphi \pi \sigma_0 R} \vec{a}_R$$

$$V(R) - V(R = \varphi a) = -\int_{\varphi a}^R \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_{\varphi a}^R \frac{I dR}{\varphi \pi \sigma_0 R} = -\frac{I}{\varphi \pi \sigma_0} \ln(R) \Big|_{\varphi a}^R$$

$$V(R) - 0 = \frac{I}{\varphi \pi \sigma_0} \ln \left[\frac{\varphi a}{R} \right]$$

$$V(R = a) = V_0 \Rightarrow V_0 = \frac{I}{\varphi \pi \sigma_0} \ln[\varphi] \Rightarrow \frac{I}{\varphi \pi} = \sigma_0 \frac{V_0}{\ln(\varphi)} \quad \vec{J} = \frac{I}{\varphi \pi R^y} \vec{a}_R = \frac{\sigma_0 V_0}{\ln(\varphi) R^y} \vec{a}_R$$

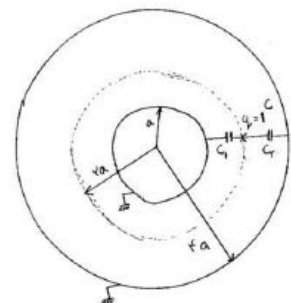
۳- گزینه «۲» صحیح است.

www.nashr-estekhdam.ir

بار روی کره بزرگتر $-q_v$

$$q \propto C$$

$$\frac{q_v}{q} = \frac{C_v}{C_1 + C_v} = \frac{\frac{\varphi \pi \epsilon_0}{\frac{1}{\varphi a} - \frac{1}{\varphi a}}}{\frac{\varphi \pi \epsilon_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{\varphi a}} + \frac{\varphi \pi \epsilon_0}{\frac{1}{\varphi a} - \frac{1}{\varphi a}}} = \frac{\varphi}{\varphi} \Rightarrow q_v = \frac{\varphi}{\varphi}$$



۴- گزینه «۴» صحیح است.

$$dC = \frac{\epsilon dS_R}{dR} = \frac{\left[\epsilon_0 \left(1 + \frac{a}{R}\right) \sin \theta (1 + \cos \varphi) \right] R^\gamma \sin \theta d\theta d\varphi}{dR}$$

$$\int_a^\infty \frac{dR}{R(R+a)} = \frac{1}{a} \text{Ln} \left(\frac{R}{R+a} \right) \Big|_a^\infty = \frac{1}{a} \text{Ln}(\gamma)$$

$$\int_0^\pi \sin^\gamma \theta d\theta = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} (1 + \cos \varphi) d\varphi = 2\pi$$

$$C = \frac{\epsilon_0 (\pi) (2\pi)}{\frac{1}{a} \text{Ln}(\gamma)} = \frac{2\pi^\gamma \epsilon_0 a}{\text{Ln}(\gamma)}$$

$$V = \frac{Q_0}{C} = \frac{(\gamma \pi \epsilon_0 a V_0)}{\frac{2\pi^\gamma \epsilon_0 a}{\text{Ln}(\gamma)}} = \frac{\gamma}{2} \text{Ln}(\gamma) V_0$$

۵- گزینه «۲» صحیح است.

$$\nabla \cdot D = \rho$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rD) = r \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} (rD) = r^\gamma \Rightarrow rD = \frac{r^{\gamma+1}}{\gamma+1} + c \xrightarrow{D(r=0)=0} c = 0$$

$$D = \frac{r^{\gamma+1}}{\gamma+1}$$

$$w = \frac{1}{\gamma \epsilon_0} |D|^\gamma = \frac{1}{\gamma \epsilon_0} (r^{\gamma+1})^\gamma$$

$$W = \int w dV = \int \frac{1}{\gamma \epsilon_0} (r^{\gamma+1})^\gamma \gamma \pi r \ell dr$$

www.nashr-estekhdam.ir

$$\frac{W}{\ell} = \frac{\pi}{\gamma \epsilon_0} \left(\frac{r^{\gamma+1}}{\gamma+1} \right)^\gamma = \frac{\pi a^{\gamma+1}}{\gamma \epsilon_0}$$

۶- گزینه «۲» صحیح است.

$$dC = \frac{\epsilon dS_z}{dz}$$

$$dR = \frac{dz}{\sigma dS_z} = \frac{dz}{\left[\sigma_0 \left(1 + \frac{1}{r}\right) (1 + z^\gamma) (1 + \cos^\gamma \varphi) \right] r dr d\varphi}$$

$$\int (r+1) dr = \frac{r^{\gamma+1}}{\gamma+1} + r \Big|_1^\gamma = \frac{\Delta}{\gamma}$$

$$\int \frac{dz}{z^2 + 1} = \tan^{-1}(z) \Big|_1^1 = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 \varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi) d\varphi = 3\pi$$

$$R = \frac{\frac{\pi}{4}}{\sigma_0 (\frac{\Delta}{r})(r\pi)} = \frac{1}{3 \cdot \sigma_0}$$

۷- گزینه «۱» صحیح است.

$$F = q\vec{E} = \frac{|P|q}{4\pi\epsilon_0 R^2} [r \cos \theta \vec{a}_R + \sin \theta \vec{a}_\theta]$$

$$W = - \int_{start}^{end} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = - \int \frac{|P|q}{4\pi\epsilon_0 R^2} [r \cos \theta \vec{a}_R + \sin \theta \vec{a}_\theta] \cdot (dR \vec{a}_R + R d\theta \vec{a}_\theta)$$

$$W_1 = - \int \frac{p_0 q \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} dR = \frac{p_0 q \sqrt{r}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{2R} \right)_r = \frac{p_0 q}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{\sqrt{r}}{16} \right)$$

$$W_2 = - \int \frac{p_0 q \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 (r)^2} d\theta = \frac{p_0 q}{16\pi\epsilon_0} (\cos \theta)_r = \frac{p_0 q}{16\pi\epsilon_0} \left(\frac{1 - \sqrt{r}}{2} \right)$$

$$W = W_1 + W_2 = \frac{p_0 q}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{\sqrt{r} + 4 - 4\sqrt{r}}{16} \right) = \frac{p_0 q}{128\pi\epsilon_0} (4 - \sqrt{r})$$

www.nashr-estekhdam.ir

۸- گزینه «۴» صحیح است.

$$W = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{C} \quad F_Q = \frac{dW}{dx} = \pi\epsilon_0 \left[\frac{\frac{1}{\sqrt{a_1 a_r}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{a_1 a_r}} \right)} \right] = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 x}$$

۹- گزینه «۱» صحیح است.

$$W_{r1} = \int v_r dq_1 = v_r Q_1 \Rightarrow W_{r1} = \frac{Q_r}{4\pi\epsilon_0 b} \cdot Q_1 = \frac{(4\pi b^2) \rho_{s_r} \cdot \rho_{s_1} (4\pi a^2)}{4\pi\epsilon_0 b} = \frac{4\pi \rho_{s_1} \rho_{s_r} a^2 b}{\epsilon_0}$$

۱۰- گزینه «۴» صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} V_0 = E_1 d_1 + E_2 d_2 \\ J_1 = J_2 \Rightarrow \sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E_1 = \frac{\sigma_2}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1} V_0 \\ E_2 = \frac{\sigma_1}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1} V_0 \end{array} \right.$$

$$\rho_S = D_{yn} - D_{in} = \epsilon_y E_{yn} - \epsilon_l E_{ln} = \frac{\epsilon_y \sigma_l - \epsilon_l \sigma_y}{d_l \sigma_y + d_y \sigma_l} V_o$$

۱۱- گزینه «۱» صحیح است.

$$dR = \frac{dr}{\sigma dS_r} = \frac{dr}{\sigma_o \left(1 + \frac{a}{r}\right) r^y \sin \theta d\theta d\varphi}$$

$$\int \frac{dr}{r(r+a)} = \frac{1}{a} \text{Ln}\left(\frac{r}{r+a}\right) \Bigg|_r^\infty = \frac{1}{a} \text{Ln}\left(\frac{r+a}{r}\right)$$

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta = 2$$

$$R(r) = \frac{a \text{Ln}\left(\frac{r+a}{r}\right)}{\sigma_o 4\pi}$$

$$\frac{V(r-\infty)}{V_o} = \frac{R(r-\infty)}{R(a-\infty)} = \frac{\text{Ln}\left(\frac{r+a}{r}\right)}{\text{Ln}(2)}$$

$$V(r) = V_o \frac{\text{Ln}\left(\frac{r+a}{r}\right)}{\text{Ln}(2)}$$

۱۲- گزینه «۳» صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} Q_s(t) &= A e^{\frac{-\alpha_r t}{\epsilon_r}} + B \\ Q_s(t=0) &= Q = A + B \\ Q_s(t=\infty) &= B \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q_s(t) = Q e^{\frac{-\alpha_r t}{\epsilon_r}}$$

www.nashr-estekhdam.ir

$$E_y = \frac{Q_s(t)}{4\pi\epsilon_y r^y} \hat{a}_r = \frac{Q e^{\frac{-\alpha_r t}{\epsilon_r}}}{4\pi\epsilon_y r^y} \hat{a}_r \xrightarrow{J=\sigma E} J_y = \frac{\sigma_y Q e^{\frac{-\alpha_r t}{\epsilon_r}}}{4\pi\epsilon_y r^y} \hat{a}_r$$

$$\left\{ \begin{aligned} J_l &= 0 \\ J_y &= \frac{\sigma_y Q e^{\frac{-\alpha_r t}{\epsilon_r}}}{4\pi\epsilon_y r^y} \hat{a}_r \end{aligned} \right.$$

الکترومغناطیسی

- ۱ - دو حلقه‌ی کوچک به شعاع a و دارای جریان‌های هم‌جهت I به فاصله‌ی d ($a \ll d$) در صفحه‌ی xy مفروض‌اند. اگر فاصله‌ی دو حلقه به $2d$ افزایش یابد کار عامل خارجی چقدر خواهد بود؟

$$\frac{\mu_0 \pi a^4}{32 d^3} \quad (1) \quad \frac{7 \mu_0 \pi a^4}{64 d^3} \quad (2) \quad \frac{7 \mu_0 \pi a^4}{96 d^3} \quad (3) \quad \frac{\mu_0 \pi a^4}{16 d^3} \quad (4)$$

- ۲ - کره‌ای به شعاع a دارای مغناطیس شدگی یکنواخت $\vec{M} = M_0 \hat{z}$ می‌باشد. بردار چگالی شار مغناطیسی \vec{B} در داخل کره کدام است؟

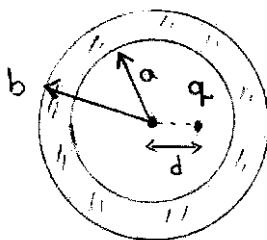
$$\vec{B} = \mu_0 M_0 \hat{z} \quad (1) \quad B = \frac{1}{3} \mu_0 M_0 \hat{z} \quad (2)$$

$$B = \frac{2}{3} \mu_0 M_0 \hat{z} \quad (3) \quad \vec{B} = -\mu_0 M_0 \hat{z} \quad (4)$$

- ۳ - کره‌ای به شعاع a و مرکز مبدأ مختصات دارای بار سطحی با چگالی $\rho_s = \cos \theta$ می‌باشد کدام گزینه پتانسیل الکتریکی را داخل کره نشان می‌دهد؟

$$V = \frac{1}{3 \epsilon_0} R \cos \theta \quad (4) \quad V = R \sin \theta \quad (3) \quad V = R \cos \theta \quad (2) \quad \text{صفر} \quad (1)$$

- ۴ - یک پوسته‌ی کروی رسانا به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b مطابق شکل در مبدأ مختصات واقع است. بار نقطه‌ای q به فاصله‌ی d ($a > d$) از مرکز پوسته‌ی کروی واقع است. پتانسیل الکتریکی در مرکز کره کدام است؟



$$\frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{b} + \frac{1}{d-a} \right] \quad (2) \quad \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{d} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right] \quad (1)$$

$$\frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \left[\frac{a+b-d}{a(b-d)} \right] \quad (4) \quad \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \left[\frac{b+(d-a)}{b(d-a)} \right] \quad (3)$$

- ۵ - کره‌ای به شعاع a دارای بار حجمی با چگالی $\rho = \rho_0 R^2$ می‌باشد نسبت انرژی ذخیره شده در خارج کره به انرژی ذخیره شده در داخل کره کدام است؟

$$5 \quad (1) \quad 7 \quad (2) \quad 9 \quad (3) \quad 11 \quad (4)$$

- ۶ - حلقه‌ای به شعاع a و دارای جریان I به مرکز مبدأ مختصات و در صفحه‌ی xy مفروض است. بار الکتریکی q با سرعت ثابت $\vec{V} = V_0 \hat{x}$ بر روی محور x ها در حرکت است نیروی وارد بر بار هنگامی که در نقطه‌ی $(x = d, 0, 0)$ می‌باشد، کدام است؟ ($d \gg a$)

$$\frac{\mu_0 q V_0 a^2 I}{4 \pi d^3} \hat{y} \quad (2) \quad \frac{\mu_0 q V_0 a^2 I}{4 d^3} \hat{y} \quad (1)$$

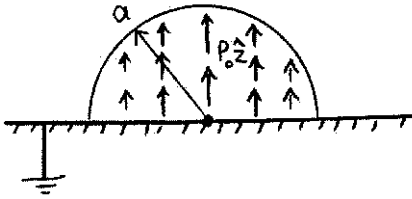
$$\frac{\mu_0 q V_0 a^2 I}{8 \pi d^3} \hat{y} \quad (4) \quad \text{صفر} \quad (3)$$

۷ - کره‌ای به شعاع a دارای قطبی شدگی یکنواخت $\vec{P} = P_0 \hat{z}$ می‌باشد انرژی الکتریکی خارج کره کدام است؟

(۱) صفر (۲) $\frac{4\pi P_0^2 a^3}{9\epsilon_0}$ (۳) $\frac{4\pi P_0^2 a^3}{12\epsilon_0}$ (۴) $\frac{4\pi P_0^2 a^3}{27\epsilon_0}$

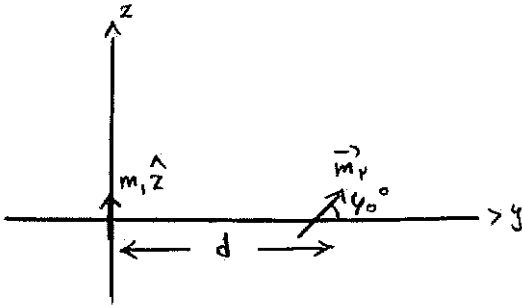
۸ - نیم کره‌ای به شعاع a به صورت $P_0 \hat{z}$ قطبیده شده است و مطابق شکل زیر بر روی صفحه‌ای رسانا با پتانسیل صفر ولت قرار

داده شده است. شدت میدان الکتریکی در مرکز کره کدام است؟



(۱) صفر (۲) $-P_0 \hat{z}$ (۳) $-\frac{P_0}{2\epsilon_0} \hat{z}$ (۴) $-\frac{P_0}{3\epsilon_0} \hat{z}$

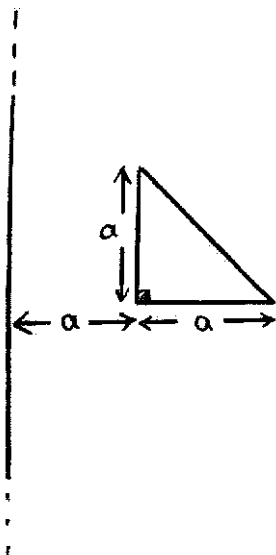
۹ - دو قطبی میکروسکوپی مغناطیسی $m_1 \hat{z}$ در مبدأ مختصات مفروض است. می‌خواهیم دو قطبی میکروسکوپی \vec{m}_2 را مطابق شکل زیر به فاصله‌ی d از مبدأ قرار دهیم کار انجام شده کدام است؟



(۱) $\frac{\mu_0 |m_1| |m_2|}{4\pi d^3}$ (۲) $\frac{\sqrt{3} \mu_0 |m_1| |m_2|}{4\pi d^3}$

(۳) $\frac{3 \mu_0 |m_1| |m_2|}{4\pi d^3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3} \mu_0 |m_1| |m_2|}{4\pi d^3}$

۱۰ - در شکل زیر اندوکتانس متقابل سیم نامحدود و حلقه مثلی کدام است؟

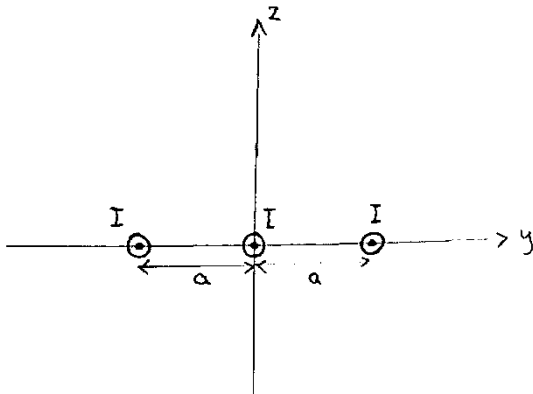


www.nashr-estekhdam.ir

(۱) $\frac{\mu_0 a}{2\pi} (\ln(2) - 1)$ (۲) $\frac{\mu_0 a}{2\pi} (2\ln(2) - 1)$

(۳) $\frac{\mu_0 a}{2\pi} (\ln(2) + 1)$ (۴) $\frac{\mu_0 a}{4\pi} (\ln(2) + 1)$

۱۱ - سه سیم نامحدود با طول ℓ جریان‌های یکسان I مطابق شکل زیر به صورت موازی با هم قرار دارند سیم وسطی را در راستای محور z ها کمی جابه‌جا کرده و رها می‌کنیم. پریود نوسانات این سیم کدام است؟ (جرم سیم وسطی m است)



www.nashr-estekhdam.ir

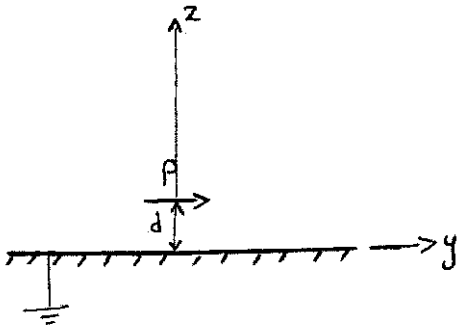
$$\frac{\pi a}{I} \sqrt{\frac{2m\pi}{\mu_0}} \quad (2)$$

$$\frac{2\pi a}{I} \sqrt{\frac{2m\pi}{\mu_0}} \quad (1)$$

$$\frac{\pi a}{I} \sqrt{\frac{m\pi}{\mu_0 \ell}} \quad (4)$$

$$\frac{2\pi a}{I} \sqrt{\frac{m\pi}{\mu_0}} \quad (3)$$

۱۲ - دو قطبی الکتریکی میکروسکوپی \vec{P} مطابق شکل زیر به صورت افقی در نقطه‌ی $z = d$ قرار داده شده است. شدت میدان الکتریکی در نقطه‌ی $(0, 0, z = 2d)$ کدام است؟



$$\frac{19 |P|}{864 \pi \epsilon_0 d^3} (-\hat{y}) \quad (2)$$

$$\frac{|P|}{32 \pi \epsilon_0 d^3} (-\hat{y}) \quad (1)$$

$$\frac{7 |P|}{27 \pi \epsilon_0 d^3} (-\hat{y}) \quad (4)$$

$$\frac{13 |P|}{54 \pi \epsilon_0 d^3} (-\hat{y}) \quad (3)$$

الکترومغناطیس

۱- گزینه «۳» صحیح است.

چون نیرو بین دو قطبی‌های این مسئله جاذبه می‌باشد کار انجام شده مثبت خواهد بود و اندازه‌ی آن برابر است با:

$$W = \Delta W = \int_d^{\infty} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_d^{\infty} \frac{\mu_0 m_1 m_2}{4\pi \ell^3} d\ell = \frac{\mu_0 m_1 m_2}{4\pi} \left[\frac{-1}{2 \ell^2} \right]_d^{\infty} = \frac{\mu_0 m_1 m_2}{8\pi d^2}$$

$$m_2 = m_1 = \pi a^2 I$$

$$W = \frac{\mu_0 \pi a^4 I^2}{8 d^2}$$

۲- گزینه «۳» صحیح است.

۳- گزینه «۴» صحیح است.

$$V(R, \theta) = \sum \left[A_n R^n + \frac{B_n}{R^{n+1}} \right] P_n(\cos \theta) \Rightarrow \begin{cases} V_{in} = \sum A_n R^n P_n(\cos \theta) \\ V_{out} = \sum \frac{B_n}{R^{n+1}} P_n(\cos \theta) \end{cases}$$

واضح است که به خاطر شرایط اولیه $P_0 = \cos \theta$ بایستی $n=1$ باشد

$$\begin{cases} V_{in} = A_1 R \cos \theta \\ V_{out} = \frac{B_1}{R^2} \cos \theta \end{cases}$$

$$R=a \Rightarrow V_{in} = V_{out} \Rightarrow A_1 a = \frac{B_1}{a^2} \Rightarrow B_1 = a^3 A_1$$

$$(D_{out})_n - (D_{in})_n = P_s \Rightarrow \left. \frac{\partial V_{out}}{\partial R} \right|_{R=a} - \left. \frac{\partial V_{in}}{\partial R} \right|_{R=a} = -\frac{1}{\epsilon_0} P_s$$

$$A_1 \cos \theta + a^3 A_1 \left(\frac{2}{a^3} \right) \cos \theta = \frac{1}{\epsilon_0} \cos \theta \Rightarrow A_1 = \frac{1}{3 \epsilon_0}$$

$$V_{in} = \frac{1}{3 \epsilon_0} R \cos \theta$$

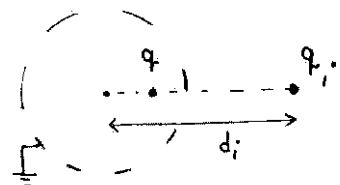
$$V_{out} = \frac{a^3}{3 \epsilon_0 R^2} \cos \theta \rightarrow \begin{cases} \vec{E}_{in} = -\nabla V_{in} \\ \vec{E}_{out} = -\nabla V_{out} \end{cases}$$

www.nashr-estekhdam.ir

۴- گزینه «۱» صحیح است.

$$R=b \text{ پتانسیل روی کره در } V_0 = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 b}$$

$$R=b \text{ پتانسیل در مرکز کره با مرجع } V' = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 d} + \frac{q_i}{4\pi \epsilon_0 d_i}$$



$$q_i = -\frac{a}{d}q, \quad d_i = \frac{a^2}{d}$$

$$\Rightarrow V' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{d} + \frac{-\frac{a}{d}}{\frac{a^2}{d}} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{d} - \frac{1}{a} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$$\infty \quad V = V_0 + V' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{b} + \frac{1}{d} - \frac{1}{a} \right]$$

توجه: نتیجه فوق را از روی بار القایی روی رسانا نیز می‌توان به دست آورد.

۵- گزینه «۳» صحیح است.

$$P = P_0 R^n$$

$$n = 2 \Rightarrow \frac{W_{out}}{W_{in}} = 2n + 5 = 9$$

۶- گزینه «۱» صحیح است.

$$\vec{F} = q(\vec{V} \times \vec{B})$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 |m|}{4\pi d^3} (-\hat{z}) = \frac{\mu_0 (\pi a^2) I}{4\pi d^3} (-\hat{z}) = \frac{\mu_0 a^2 I}{4d^3} (-\hat{z})$$

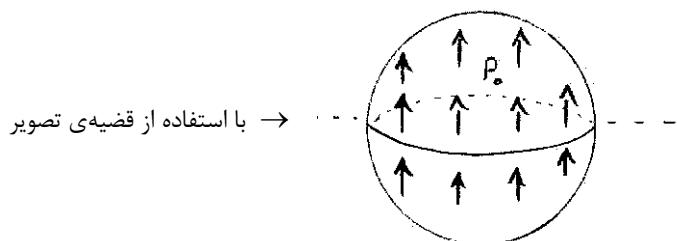
$$\vec{F} = q \left[V_0 \hat{x} \times (-\hat{z}) \frac{\mu_0 a^2 I}{4d^3} \right] = \frac{\mu_0 q V_0 a^2 I}{4d^3} \hat{y}$$

۷- گزینه «۴» صحیح است.

$$\vec{P} = P_0 \left(\frac{4\pi}{3} a^3 \right) \hat{z}$$

$$W = \frac{|P^2|}{12\pi\epsilon_0 a^3} = \frac{P_0^2 \left(\frac{4\pi}{3} \right)^2 a^3}{12\pi\epsilon_0} = \frac{P_0^2 (4\pi) a^3}{27\epsilon_0}$$

www.nashr-estekhdam.ir



۸- گزینه «۴» صحیح است.

$$\vec{E} = \frac{-P_0}{3\epsilon_0} \hat{z}$$

میدان در مرکز نیم کره‌ی $P_0 \hat{z}$

۹- گزینه «۲» صحیح است.

$$V = \frac{\mu_0}{4\pi d^3} [\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 - 3(\vec{m}_1 \cdot \hat{y})(\vec{m}_2 \cdot \hat{y})] = \frac{\mu_0 |\vec{m}_1| |\vec{m}_2| \cos \theta}{4\pi d^3} = \frac{\sqrt{3} \mu_0 m_1 m_2}{4\pi d^3}$$

۱۰- گزینه «۲» صحیح است.

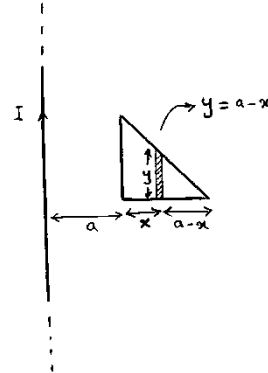
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi (a+x)}$$

$$d\phi = B ds = B y dx$$

$$\phi_{12} = \int d\phi = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{a-x}{a+x} dx$$

$$L_{12} = \frac{\phi_{12}}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_0^a \frac{a-x}{a+x} dx = \frac{\mu_0}{2\pi} [a \ln(x+a) - x]_0^a$$

$$= \frac{\mu_0 a}{2\pi} (2 \ln(2a) - 1)$$

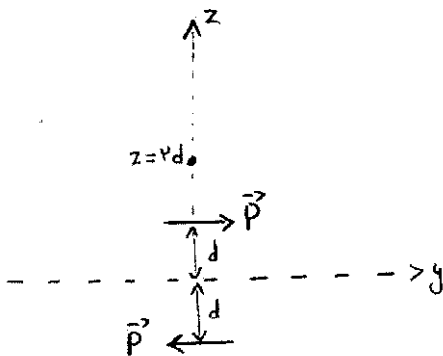


۱۱- گزینه «۳» صحیح است.

$$F_{T_0} = \tau |F| = \tau \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} \ell = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} \ell$$

$$\omega = \sqrt{\frac{F_{T_0}}{ma}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{ma}{F_{T_0}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m \pi a^3}{\mu_0 I^2 \ell}} = \frac{2\pi a}{I} \sqrt{\frac{m \pi}{\mu_0 \ell}}$$

۱۲- گزینه «۳» صحیح است.



www.nashr-estekhdam.ir

$$\vec{E} = \frac{|P|}{4\pi \epsilon_0 (r \sin \theta)^3} (-\hat{y}) + \frac{|P|}{4\pi \epsilon_0 (r \cos \theta)^3} (+\hat{y}) = \frac{|P|}{4\pi \epsilon_0 r^3} \left(-1 + \frac{1}{\cos^3 \theta} \right) \hat{y} = \frac{-13|P|}{54\pi \epsilon_0 r^3} \hat{y}$$

الکترومغناطیس

۱ - اگر $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ باشد و حجم V کره‌ای به شعاع a و مرکز مبدأ مختصات، مقدار انتگرال زیر کدام است؟

$$I = \int_V \left(r^2 + r + 3 \right) \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) dV$$

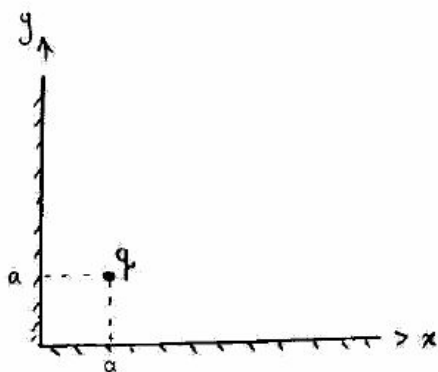
(۴) 36π

(۳) 24π

(۲) 12π

(۱) صفر

۲ - بار نقطه‌ای q مطابق شکل زیر در مجاورت دو صفحه‌ی رسانای زمین شده قرار گرفته است. پتانسیل الکتریکی در فواصل دور r روی نیمساز دو صفحه با r چه رابطه‌ای دارد؟ ($r \gg a$)



(۱) $\frac{1}{r^2}$

(۲) $\frac{1}{r^3}$

(۳) $\frac{1}{r^4}$

(۴) $\frac{1}{r^5}$

۳ - بین دو پوسته‌ی کروی رسانا $[a \leq r \leq 4a]$ ماده‌ای با گذردهی $\epsilon = \frac{\epsilon_0}{r}$ پر شده است. اگر کره‌ی کوچکتر به پتانسیل V_0 و کره‌ی بزرگتر به زمین متصل شود پتانسیل در $r = 2a$ کدام است؟

(۴) $\frac{1}{4} V_0$

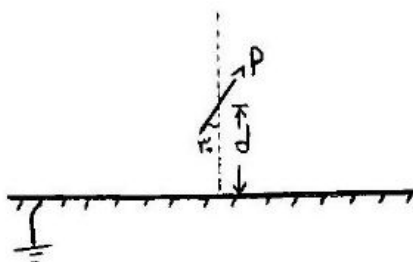
(۳) $\frac{1}{3} V_0 \ln(2)$

(۲) $\frac{1}{2} V_0 \ln(2)$

(۱) $\frac{V_0}{2}$

۴ - در شکل زیر دو قطبی میکروسکوپی P به فاصله‌ی d بالای یک صفحه‌ی رسانای متصل به زمین قرار دارد. گشتاور اعمالی بر آن کدام است؟

www.nashr-estekhdam.ir



(۱) $\frac{P^2}{32\pi\epsilon_0 d^3}$

(۲) $\frac{\sqrt{3} P^2}{64\pi\epsilon_0 d^3}$

(۳) $\frac{P^2}{64\pi\epsilon_0 d^3}$

(۴) $\frac{\sqrt{3} P^2}{32\pi\epsilon_0 d^3}$

۵ - کره‌ای به شعاع a دارای قطبی‌شدگی شعاعی به صورت $\vec{P} = kr^2$ (در مختصات کروی) می‌باشد، شدت میدان الکتریکی در داخل کره کدام است؟

(۴) $\frac{-3kr^2}{4\epsilon_0}$

(۳) $\frac{-kr^2}{3\epsilon_0}$

(۲) $\frac{-4kr^2}{3\epsilon_0}$

(۱) $\frac{-kr^2}{\epsilon_0}$

۶ - کره‌ای به شعاع a به صورت یکنواخت قطبیده شده است $[\vec{P} = P_0 \hat{z}]$ بتانسیل الکتریکی در نقطه‌ی

$$\left(r = 2a, \theta = \frac{\pi}{6}, \varphi = 0 \right) \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{\sqrt{3} P_0 a}{24 \epsilon_0} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{3} P_0 a}{8 \pi \epsilon_0} \quad (۳)$$

$$\frac{P_0 a}{8 \pi \epsilon_0} \quad (۲)$$

$$\frac{P_0 a}{24 \epsilon_0} \quad (۱)$$

۷ - یک ماده‌ی دی الکتریک به شکل استوانه ای طویل به شعاع a با حساسیت الکتریکی χ_e در میدان الکتریکی ثابت $E_0 \hat{x}$ قرار می‌گیرد. میدان الکتریکی در داخل استوانه کدام است؟

$$\frac{2}{\chi_e + 3} E_0 \hat{x} \quad (۴)$$

$$\frac{\chi_e + 1}{\chi_e} E_0 \hat{x} \quad (۳)$$

$$\frac{2}{\chi_e + 2} E_0 \hat{x} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{\chi_e + 1} E_0 \hat{x} \quad (۱)$$

۸ - دو صفحه‌ی نامحدود زمین شده در $z = 0$, $z = d$ قرار داده شده‌اند. بار نقطه‌ای q در نقطه‌ی $\left(0, 0, \frac{d}{3} \right)$ قرار می‌دهیم. بار

القائی روی صفحه $z = d$ کدام است؟

$$-\frac{q}{3} \quad (۱)$$

$$-\frac{2q}{3} \quad (۲)$$

$$-\frac{q}{4} \quad (۳)$$

$$-\frac{2q}{5} \quad (۴)$$

$z = d$

q

$z = 0$

www.nashr-estekhdam.ir

۹ - استوانه‌ی طویلی به شعاع a دارای مغناطیس شدگی به صورت $\vec{M} = r^2 \hat{\varphi}$ می‌باشد $[\hat{z}$ محور استوانه است] بردار B در داخل استوانه کدام است؟

$$\text{صفر} \quad (۴)$$

$$\frac{-1}{2} \mu_0 r^2 \hat{\varphi} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{2} \mu_0 r^2 \hat{\varphi} \quad (۲)$$

$$\mu_0 r^2 \hat{\varphi} \quad (۱)$$

۱۰ - کره‌ای از جنس ماده‌ی مغناطیسی با ضریب حساسیت $\chi_m = 3$ را در یک میدان مغناطیسی یکنواخت $B_0 \hat{z}$ قرار می‌دهیم. بردار B در داخل کره کدام است؟

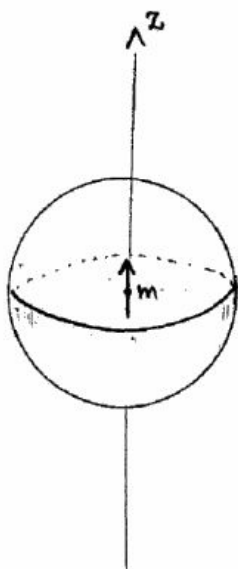
$$\frac{2}{3} B_0 \hat{z} \quad (۲)$$

$$\frac{B_0}{3} \hat{z} \quad (۱)$$

$$-\frac{2}{3} B_0 \hat{z} \quad (۴)$$

$$2 B_0 \hat{z} \quad (۳)$$

۱۱- در مرکز کره‌ای به شعاع a و دارای بار سطحی به چگالی σ ، دو قطبی مغناطیسی $m \hat{z}$ قرار گرفته است که را در چه جهتی و با چه سرعت زاویه‌ای دوران دهیم تا میدان مغناطیسی در خارج کره صفر شود؟



$$(1) \quad \omega = \frac{3m}{4\pi\sigma a^4} \quad \text{در جهت مثلثاتی}$$

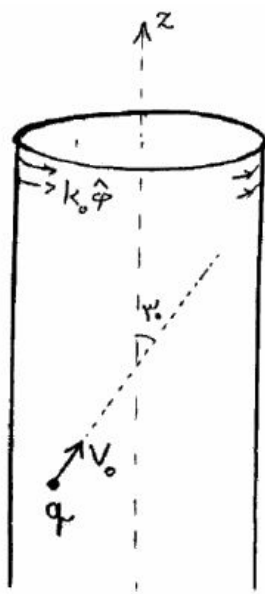
$$(2) \quad \omega = \frac{6m}{4\pi\sigma a^4} \quad \text{در جهت مثلثاتی}$$

$$(3) \quad \omega = \frac{3m}{4\pi\sigma a^4} \quad \text{در خلاف جهت مثلثاتی}$$

$$(4) \quad \omega = \frac{6m}{4\pi\sigma a^4} \quad \text{در خلاف جهت مثلثاتی}$$

www.nashr-estekhdam.ir

۱۲- در داخل استوانه‌ای طولی به شعاع a و دارای جریان سطحی $\vec{k} = k_0 \hat{\phi}$ ، بار نقطه‌ای q مطابق شکل با سرعت ثابت V_0 در حرکت است. اندازه‌ی نیروی وارد بر آن کدام است؟



$$(1) \quad \frac{1}{2} \mu_0 q V_0 k_0$$

$$(2) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \mu_0 q V_0 k_0$$

$$(3) \quad \frac{1}{4} \mu_0 q V_0 k_0$$

$$(4) \quad \frac{\sqrt{3}}{4} \mu_0 q V_0 k_0$$

الکترومغناطیس

۱- گزینه «۲» صحیح است.

$$I = (r^2 + r + 3) \Big|_{r=0} \times 4\pi = 12\pi$$

۲- گزینه «۲» صحیح است.

$$V \propto \frac{1}{r^2}$$

چون نتیجه یک ۴ قطبی می‌شود:

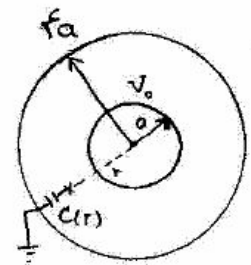
۳- گزینه «۱» صحیح است.

$$dC = \frac{\epsilon dS_r}{dr} = \frac{\left(\frac{\epsilon_0}{r}\right) r^2 d\Omega}{dr} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{dr}{r}}$$

$$\int_r^{ra} \frac{dr}{r} = \ln\left(\frac{ra}{r}\right)$$

$$V \propto \frac{1}{C} \propto \ln\left(\frac{ra}{r}\right) \Rightarrow \frac{V(r)}{V(a)} = \frac{\ln\left(\frac{ra}{r}\right)}{\ln(r)} \Rightarrow V(r) = V_0 \frac{\ln\left(\frac{ra}{r}\right)}{\ln(r)}$$

$$V(r=ra) = V_0 \frac{\ln(r)}{\ln(r)} = \frac{V_0}{r}$$



۴- گزینه «۴» صحیح است.

www.nashr-estekhdam.ir

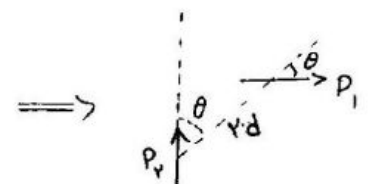
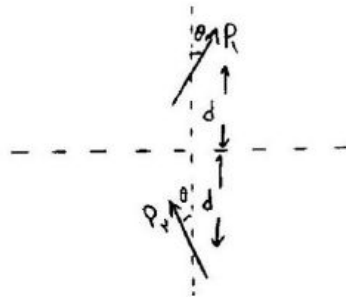
$$E_{r1} = \frac{|P_r|}{4\pi\epsilon_0 (rd)^r} [r \cos \theta \vec{a}_R + \sin \theta \vec{a}_\theta]$$

$$\vec{P}_1 = |P_1| [\cos \theta \vec{a}_R + \sin \theta \vec{a}_\theta]$$

$$\vec{\tau}_{r1} = \vec{P}_1 \times \vec{E}_{r1} = \frac{P^r}{r^2 \pi \epsilon_0 d^r} [(\cos \theta \vec{a}_R + \sin \theta \vec{a}_\theta) \times (r \cos \theta \vec{a}_R + \sin \theta \vec{a}_\theta)]$$

$$= \frac{P^r}{r^2 \pi \epsilon_0 d^r} [\cos \theta \sin \theta \vec{a}_\phi - r \sin \theta \cos \theta \vec{a}_\phi]$$

$$= \frac{P^r \sin(\theta)}{r^2 \pi \epsilon_0 d^r} (-\hat{a}_\phi) \Rightarrow |z| = \frac{P^r \sin \theta}{r^2 \pi \epsilon_0 d^r} = \frac{\sqrt{r} P^r}{r^2 \pi \epsilon_0 d^r}$$



۵- گزینه «۱» صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho + \rho_b}{\epsilon_0} \\ \rho &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_b}{\epsilon_0} = \frac{-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \epsilon \vec{E} = -\vec{P} \Rightarrow \vec{E} = \frac{-\vec{P}}{\epsilon_0} = \frac{-k r^r}{\epsilon_0}$$

۶- گزینه «۴» صحیح است.

$$\vec{p} = \left(\frac{4\pi}{3} a^r \right) P_0 \hat{z}$$

$$V = \frac{|p| \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^r} = \frac{\left(\frac{4\pi}{3} a^r \right) P_0 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{4\pi \epsilon_0 (2a)^r} = \frac{\sqrt{3} P_0 a}{24 \epsilon_0}$$

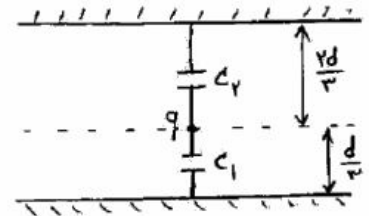
به کمک روابط دو قطبی‌ها :

۷- گزینه «۲» صحیح است.
اثبات تمرین ۴-۲۲ کتاب گریفیث

$$E_{in} = \frac{r}{\epsilon_r + 1} E_0 \hat{x} = \frac{r}{\chi_e + 2} E_0 \hat{x}$$

۸- گزینه «۱» صحیح است.

$$z = d \text{ بار القایی روی } = -q_r = -q \frac{C_r}{C_1 + C_r} = -q \frac{\frac{1}{\frac{r}{3}d}}{\frac{1}{\frac{1}{3}d} + \frac{1}{\frac{r}{3}d}} = -q \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{r}{3}} = -\frac{q}{r}$$



۹- گزینه «۱» صحیح است.

$$\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & r^r & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^r) \hat{z} = r^r \hat{z}$$

www.nashr-estekhdam.ir

$$r < a : \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{in} \Rightarrow (r\pi r) |B| = \mu_0 (r\pi r^r) \Rightarrow |B_{in}| = \mu_0 r^r$$

$$I_{in} = \int \vec{J}_b \cdot d\vec{s}_z = \int (r^r) (r dr d\phi) = r\pi r^r \Big|_0^r = r\pi r^r$$

$$B_{in} = \mu_0 r^r \hat{\phi}$$

۱۰- گزینه «۳» صحیح است.

$$\vec{B} = \frac{r\mu_r}{\mu_r + 2} B_0 \hat{z} = \frac{r(1 + \chi_m)}{r + \chi_m} B_0 \hat{z} = \left[\frac{1 + \chi_m}{1 + \frac{\chi_m}{r}} \right] B_0 \hat{z} = r B_0 \hat{z}$$

۱۱- گزینه «۳» صحیح است.

$$J_s = \rho_s r \omega (-\hat{\phi}) = \sigma a \omega \sin \theta (-\hat{\phi})$$

$$\text{و کره} \quad \vec{m} = \left(\frac{4\pi}{3} a^3 \right) (\sigma a \omega) (-\hat{z}) = \frac{4\pi}{3} \sigma \omega a^4 (-\hat{z})$$

$$\text{و کره} \quad |\vec{m}| = m \hat{z} \Rightarrow \frac{4\pi}{3} \sigma \omega a^4 = m \Rightarrow \omega = \frac{3m}{4\pi \sigma a^4}$$

www.nashr-estekhdam.ir

۱۲- گزینه «۱» صحیح است.

$$\vec{B} = \mu_o k_o \hat{z}$$

$$|F| = q V_o |B| \sin \varphi = \frac{1}{\gamma} \mu_o q V_o k_o$$

الکترومغناطیس

۱ - بار سطحی با چگالی $\rho_s = \cos \theta$ بر روی کره‌ای به شعاع a توزیع شده است. اندازه‌ی شدت میدان الکتریکی $(|\vec{E}|)$ در

نقطه‌ی $\left(R = 2a, \theta = \frac{\pi}{3}, \varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ کدام است؟

$$\frac{\sqrt{7}}{96\epsilon_0} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{7}}{48\epsilon_0} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{7}}{24\epsilon_0} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{7}}{12\epsilon_0} \quad (1)$$

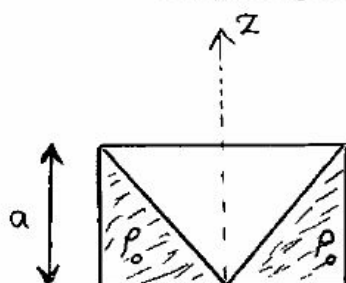
۲ - در ناحیه‌ی استوانه‌ای $0 \leq z \leq a$ ، $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ، $0 \leq r \leq a$ بار الکتریکی با چگالی حجمی یکنواخت ρ_0 توزیع شده است. اگر مطابق شکل زیر حفره‌ای مخروطی شکل ایجاد کنیم. شدت میدان الکتریکی در رأس مخروط کدام است؟

$$\frac{-\rho_0 a}{2\epsilon_0} (2 + \sqrt{2}) \hat{z} \quad (2)$$

$$\frac{-\rho_0 a}{2\epsilon_0} (2 - \sqrt{2}) \hat{z} \quad (1)$$

$$\frac{-\rho_0 a}{4\epsilon_0} (2 - \sqrt{2}) \hat{z} \quad (4)$$

$$\frac{-\rho_0 a}{4\epsilon_0} (2 + \sqrt{2}) \hat{z} \quad (3)$$



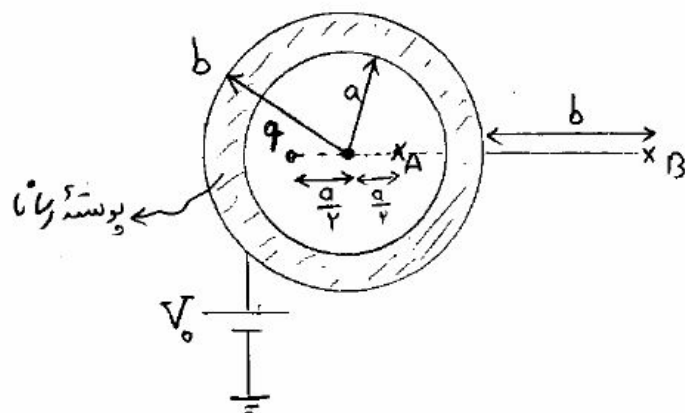
۳ - در شکل زیر کره‌ی رسانا به منبع ولتاژ V_0 متصل است. اندازه‌ی شدت میدان الکتریکی در نقاط A و B کدام است؟

$$E_A = \frac{17q}{100\pi\epsilon_0 a^2}, E_B = \frac{V_0}{4b} \quad (1)$$

$$E_A = \frac{17q}{100\pi\epsilon_0 a^2}, E_B = \frac{V_0}{2b} \quad (2)$$

$$E_A = \frac{33q}{100\pi\epsilon_0 a^2}, E_B = \frac{V_0}{4b} \quad (3)$$

$$E_A = \frac{33q}{100\pi\epsilon_0 a^2}, E_B = \frac{V_0}{2b} \quad (4)$$



۴ - بی‌نهایت سیم طویل موازی در صفحه‌ی xy و نقاط $y = k$ ، $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ قرار گرفته‌اند اگر جریان سیم‌ها در جهت

\hat{x} برابر با $I_0 (-1)^n$ باشد. شدت میدان مغناطیسی در $(0, 0, 1)$ کدام است؟

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \approx -0.4 \right]$$

$$\frac{\mu_0 I_0}{10\pi} (-\hat{y}) \quad (2)$$

$$\frac{3\mu_0 I_0}{10\pi} (-\hat{y}) \quad (1)$$

$$\frac{\mu_0 I_0}{10\pi} (-\hat{y}) \quad (4)$$

$$\frac{3\mu_0 I_0}{5\pi} (-\hat{y}) \quad (3)$$

۵ - درون کره‌ای به شعاع a بار حجمی با چگالی $\rho = \rho_0 R^2$ توزیع شده است. پتانسیل الکتریکی در شعاع $R = \frac{a}{2}$ کدام است؟

$$(1) \quad \frac{191\rho_0 a^5}{960 \epsilon_0} \quad (2) \quad \frac{191\rho_0 a^5}{480 \epsilon_0}$$

$$(3) \quad \frac{127\rho_0 a^5}{960 \epsilon_0} \quad (4) \quad \frac{127\rho_0 a^5}{480 \epsilon_0}$$

۶ - صفحه‌ی $z = 0$ مرز دو ماده‌ی مغناطیسی با مشخصات $\mu_T = 3$ برای $z > 0$ ، $\mu_T = 2$ برای $z < 0$ می‌باشد که جریان

سطحی $\vec{J}_s = -\vec{a}_x - \vec{a}_y$ نیز در این صفحه برقرار است. اگر در ناحیه‌ی $z < 0$ داشته باشیم $\vec{B} = 4\vec{a}_x - 2\vec{a}_y + 3\vec{a}_z$ ، در $\frac{\vec{B}}{\mu_0}$

این صورت $|\vec{M}|$ در ناحیه $z > 0$ کدام است؟

$$(1) \quad 2\sqrt{10} \quad (2) \quad 2\sqrt{2} \quad (3) \quad 2\sqrt{6} \quad (4) \quad \sqrt{2}$$

۷ - در فضای آزاد بر روی کره‌ای به شعاع a و مرکز مبدأ مختصات جریان سطحی $\vec{k} = k_0 \sin \theta \hat{a}_\phi$ برقرار است. اگر فضای داخل

کره ماده‌ای مغناطیسی با ضریب گذردهی نسبی $\mu_T = 4$ پر شده باشد. شدت میدان مغناطیسی (H) در نقطه‌ی

$\left(R = 2a, \theta = \frac{\pi}{2}, \phi = \frac{\pi}{2} \right)$ کدام است؟

$$(1) \quad \frac{-1}{6} \hat{z} \quad (2) \quad \frac{-1}{12} \hat{z} \quad (3) \quad \frac{-1}{4} \hat{z} \quad (4) \quad \frac{-1}{3} \hat{z}$$

۸ - دو حلقه‌ی دایروی با جریان‌های هم جهت I و شعاع یکسان a به صورت هم صفحه در مجاورت یکدیگر در فاصله‌ی r

$(r \gg a)$ قرار گرفته‌اند کار لازم جهت نصف نمودن فاصله‌ی دو حلقه کدام است؟

$$(1) \quad -\frac{7\pi\mu_0 a^4 I^2}{4r^3} \quad (2) \quad -\frac{5\pi\mu_0 a^4 I^2}{4r^3}$$

$$(3) \quad -\frac{15\pi\mu_0 a^4 I^2}{4r^3} \quad (4) \quad -\frac{3\mu_0 a^4 I^2}{4\pi r^3}$$

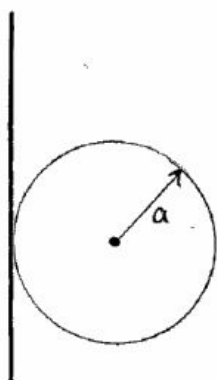
۹ - صفحه‌ی رسانای $x=d$ به ولتاژ صفر ولت و صفحه‌ی رسانای $x=3d$ را به ولتاژ V_0 متصل می‌کنیم در صورتی که فضای بین

دو صفحه از ماده با رسانایی $\sigma = \frac{\sigma_0}{x^2}$ پر شده باشد. بردار چگالی جریان در این ناحیه کدام است؟

$$(1) \quad \frac{\sigma_0 V_0}{26 d^3} (-\hat{x}) \quad (2) \quad \frac{3\sigma_0 V_0}{26 d^3} (-\hat{x})$$

$$(3) \quad \frac{\sigma_0 V_0}{d^3} (-\hat{x}) \quad (4) \quad \frac{\sigma_0 V_0}{d^3} (-\hat{x})$$

۱۰ - دو سیم هادی یکی مستقیم و بسیار طویل و دیگری به صورت دایره‌ای به شعاع a در مجاورت یکدیگر قرار گرفته‌اند اما تماس الکتریکی با هم ندارند، ضریب القاء متقابل بین این دو سیم کدام است؟



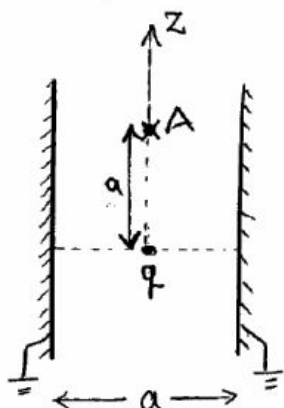
(۱) $\mu_0 a$

(۲) $2 \mu_0 a$

(۳) $\frac{1}{2} \mu_0 a$

(۴) $\frac{1}{4} \mu_0 a$

۱۱ - بار الکتریکی q در وسط دو صفحه‌ی رسانای نامحدود زمین شده قرار دارد. مطلوبست شدت میدان الکتریکی در نقطه‌ی A :



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2 + 1)^{3/2}} = -0.3$$

(۱) $\frac{q}{12 \pi \epsilon_0 a^2}$

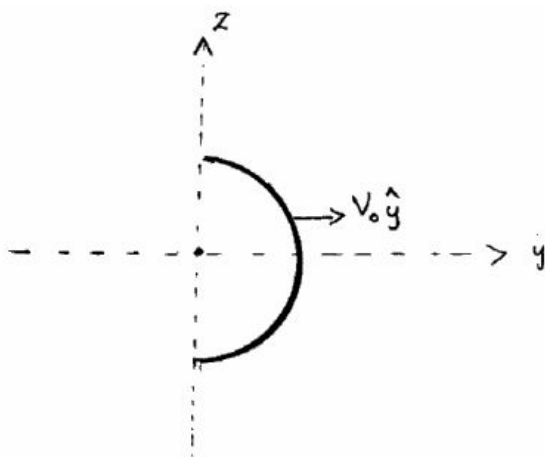
(۲) $\frac{q}{10 \pi \epsilon_0 a^2}$

(۳) $\frac{q}{8 \pi \epsilon_0 a^2}$

(۴) $\frac{q}{4 \pi \epsilon_0 a^2}$

www.nashr-estekhdam.ir

۱۲ - یک سیم هادی به صورت نیم‌دایره‌ای به شعاع a با سرعت ثابت $V_0 \hat{y}$ مطابق شکل زیر در میدان مغناطیسی $B_0 \hat{x}$ حرکت می‌کند. ولتاژ القایی بین دو انتهای هادی کدام است؟



(۱) $\pi a V_0 B_0$

(۲) $2 a V_0 B_0$

(۳) $2 \pi a V_0 B_0$

(۴) $\frac{1}{2} a V_0 B_0$

الکترومغناطیس

۱- گزینه «۳» صحیح است.

$$\vec{P} = 1 \times \left(\frac{4\pi}{3} a^3 \right) \vec{a}_z$$

$$E = \frac{|P|}{4\pi\epsilon_0 R^3} [r \cos \theta \vec{a}_R + \sin \theta \vec{a}_\theta]$$

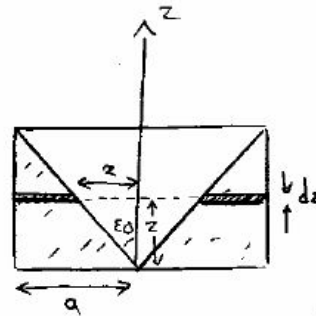
$$\frac{|P|}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{a^3}{r\epsilon_0 (\lambda a^3)} = \frac{1}{r4\epsilon_0}$$

$$r \cos \theta \vec{a}_R = r \cos(\phi) [\cos \phi \cdot \vec{a}_z + \sin \phi \cdot \vec{a}_r]_{\phi=90^\circ} = \frac{1}{r} \vec{a}_z + \frac{\sqrt{3}}{r} \vec{a}_y$$

$$\sin \theta \vec{a}_\theta = \sin \phi \cdot [-\sin \phi \cdot \vec{a}_z + \cos \phi \cdot \vec{a}_r]_{\phi=90^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{r} \left[-\frac{\sqrt{3}}{r} \vec{a}_z + \frac{1}{r} \vec{a}_y \right] = -\frac{3}{r} \vec{a}_z + \frac{\sqrt{3}}{r} \vec{a}_y$$

$$\vec{E} = \frac{1}{r4\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \vec{a}_z + \frac{3\sqrt{3}}{r} \vec{a}_y \right]$$

$$|\vec{E}| = \frac{1}{r4\epsilon_0} \times \frac{1}{r} \times \sqrt{1+27} = \frac{\sqrt{28}}{r4\epsilon_0}$$



۲- گزینه «۴» صحیح است.

$$E_1 = \int \frac{\rho_\ell}{r\epsilon_0} \frac{rZ}{(r^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}} dz$$

$$E_1 = \int \frac{\rho_s dr}{r\epsilon_0} \frac{rZ}{(r^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\rho_s Z}{r\epsilon_0} \frac{-1}{\sqrt{r^2 + Z^2}} \Bigg|_z^a = \frac{\rho_s Z}{r\epsilon_0} \left[\frac{1}{Z\sqrt{r^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + Z^2}} \right]$$

$$E_1 = \frac{\rho_s}{r\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2}} - \frac{Z}{\sqrt{Z^2 + a^2}} \right) = \frac{\rho_s dz}{r\epsilon_0} \left(\frac{\sqrt{r^2}}{r} - \frac{Z}{\sqrt{Z^2 + a^2}} \right)$$

www.nashr-estekhdam.ir

$$E_r = \int E_1 = \int_0^a \frac{\rho_0}{r\epsilon_0} \left(\frac{\sqrt{r^2}}{r} - \frac{Z}{\sqrt{Z^2 + a^2}} \right) dz = \frac{\rho_0}{r\epsilon_0} \left[\frac{\sqrt{r^2}}{r} Z - \sqrt{Z^2 + a^2} \right]_0^a$$

$$= \frac{\rho_0}{r\epsilon_0} \left[\frac{\sqrt{r^2}}{r} a - \sqrt{r^2 + a^2} + a \right] = \frac{\rho_0 a}{r\epsilon_0} \left(1 - \frac{\sqrt{r^2}}{r} \right) = \frac{\rho_0 a}{r\epsilon_0} (r - \sqrt{r^2})$$

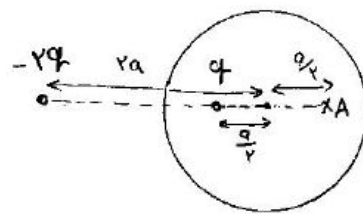
۳- گزینه «۱» صحیح است.

$$E_B = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 (rb)^3} = \frac{4\pi\epsilon_0 b V_0}{4\pi\epsilon_0 (rb)^3} = \frac{V_0}{rb} \hat{x}$$

$$d_1 = \frac{a^r}{\frac{a}{r}} = ra$$

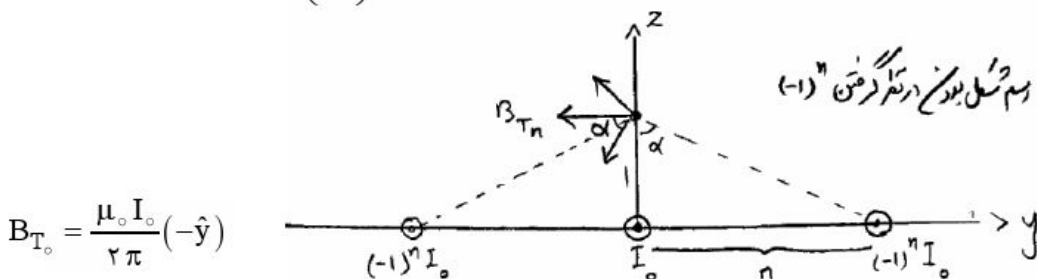
$$q_i = -\frac{a}{\frac{a}{r}} q = -rq$$

$$E_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^r} \hat{x} + \frac{rq}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{\Delta a}{r}\right)^r} \hat{x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^r} \left[1 - \frac{1}{r\Delta}\right] = \frac{17q}{10 \cdot \pi\epsilon_0 a^r} \hat{x}$$



۴- گزینه «۴» صحیح است.

رسم شکل بردار در تکمیل فرض (-۱)ⁿ



$$B_{T_0} = \frac{\mu_0 I_0}{r\pi} (-\hat{y})$$

$$B_{T_n} = r B_{T_n} \cos \alpha = r \left[\frac{\mu_0 (-1)^n I_0}{r\pi\sqrt{n^r+1}} \right] \frac{1}{\sqrt{n^r+1}} = \frac{\mu_0 (-1)^n I_0}{\pi (n^r+1)} (-\hat{y})$$

$$B_T = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_{T_n} = \frac{\mu_0 I_0}{\pi} \left(\frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^r+1} \right) (-\hat{y}) = \frac{\mu_0 I_0}{10\pi} (-\hat{y})$$

۵- گزینه «۱» صحیح است.

$$\rho = \rho_0 R^n \text{ , } V(R_0) = \frac{\rho_0}{(n+r)\epsilon_0} \left(a^{n+r} - \frac{R_0^{n+r}}{n+r} \right)$$

$$n=r \Rightarrow V\left(R_0 = \frac{a}{r}\right) = \frac{\rho_0}{\Delta\epsilon_0} \left(a^\Delta - \frac{a^\Delta}{r\Delta \times r} \right) = \frac{191\rho_0 a^\Delta}{96 \cdot \epsilon_0}$$

۶- گزینه «۲» صحیح است.



www.nashr-estekhdam.ir

$$H_r = [r\hat{x} - \hat{y}] + \hat{z} + \hat{y} - \hat{x}$$

$$H_r = \hat{x} + \hat{z} \Rightarrow |H_r| = \sqrt{2}$$

$$M_r = (\mu_{r_r} - 1) H_r = r H_r = r\sqrt{2}$$

$$\mu_{r_r} = r$$

$$\vec{J}_s = -\hat{x} - \hat{y} \quad z=0$$

$$\mu_{r_i} = r$$

$$\frac{B_1}{\mu_0} = 4\hat{x} - r\hat{y} + r\hat{z}$$

$$\rightarrow H_1 = r\hat{x} - \hat{y} + \frac{r}{r}\hat{z}$$

۷- گزینه «۲» صحیح است.

$$\vec{k}_T = \vec{k} + \vec{k}_m = \vec{k} + \frac{r(\mu_r - 1)}{\mu_r + r} \vec{k} = \vec{k} + \frac{r \times r}{r} \vec{k} = r \vec{k} = r k_o \sin \theta \hat{a}_\varphi$$

$$\vec{m} = (r k_o) \left(\frac{r \pi}{r} a^r \right) \hat{z}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_o |\vec{m}|}{4\pi R^r} (r \cos \theta \vec{a}_R + \sin \theta \vec{a}_\theta)$$

$$\left(r a, \frac{\pi}{r}, \frac{\pi}{r} \right): \vec{B} = \frac{r \mu_o a^r}{r(r a)^r} (-\hat{a}_z) \Rightarrow \vec{H}_{out} = \frac{\vec{B}}{\mu_o} = \frac{1}{1r} (-\hat{z})$$

www.nashr-estekhdam.ir

۸- گزینه «۱» صحیح است.

چون نیرو جاذبه است نزدیکتر نمودن حلقه کاری است منفی.

$$F = \frac{r \mu_o m_1 m_r}{4\pi r^r}$$

$$w = \int \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_r^r \frac{r \mu_o |m^r|}{4\pi r^r} dr = \frac{r \mu_o |m^r|}{4\pi} \left(\frac{-1}{r^r} \right)_r^r$$

$$= \frac{\mu_o |m^r|}{4\pi} \left(\frac{1}{r^r} - \frac{1}{r^r} \right) = -\frac{r \mu_o |m^r|}{4\pi r^r} = -\frac{r \mu_o (\pi a^r I)}{4\pi r^r} = -\frac{r \pi \mu_o a^r I}{4 r^r}$$

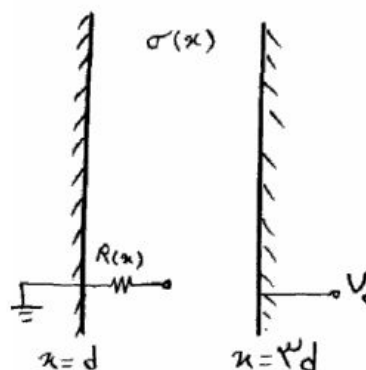
۹- گزینه «۲» صحیح است.

$$R(x) = \int_d^x \frac{dx}{\sigma A} = \frac{\sigma_o}{A} \left[\frac{x^r}{r} \right]_d^x$$

$$V \propto R(x) \propto x^r - d^r$$

$$\frac{V(x)}{V(rd)} = \frac{x^r - d^r}{r^r d^r} \Rightarrow V(x) = \frac{V_o}{r^r d^r} (x^r - d^r)$$

$$E = -\frac{dv}{dx} \hat{x} = \frac{r V_o x^{r-1}}{r^r d^r} (-\hat{x}) \Rightarrow \vec{J} = \sigma \vec{E} = \frac{r \sigma_o V_o}{r^r d^r} (-\hat{x})$$



۱۰- گزینه «۱» صحیح است.

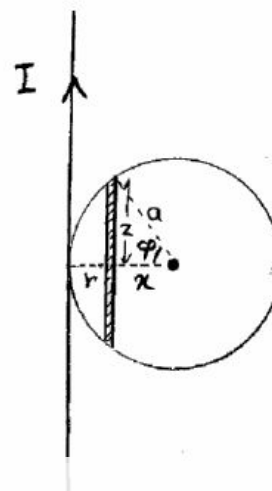
$$d\phi_m = B dS = \frac{\mu_o I}{4\pi r} (r z dr)$$

$$x = a \cos \varphi$$

$$z = a \sin \varphi$$

$$r = a - x = a(1 - \cos \varphi) = r a \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)$$

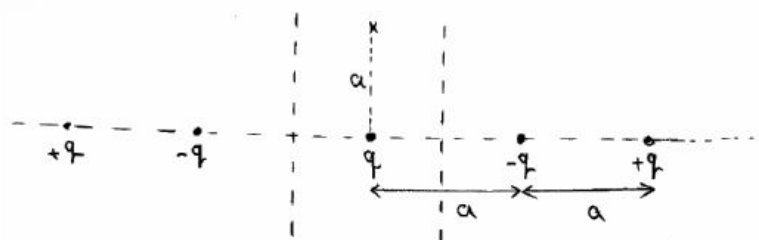
$$dr = a \sin \varphi d\varphi$$



$$d\phi_m = \frac{\mu_o I a \sin(\varphi) a \sin \varphi d\varphi}{\pi r a \sin^r \left(\frac{\varphi}{r} \right)}$$

$$\phi_{1r} = \int d\phi_m = \int \frac{r\mu_o I a}{\pi} \cos^r \left(\frac{\varphi}{r} \right) d\varphi = \int_0^\pi \frac{\mu_o I a}{\pi} (1 + \cos \varphi) d\varphi$$

$$L_{1r} = \frac{\phi_{1r}}{I} = \mu_o a$$



۱۱- گزینه «۲» صحیح است.

$$E_o = \frac{q}{r \pi \epsilon_o a^r} \hat{a}_z$$

$$E_{T_n} = r \left[\frac{(-1)^n q}{r \pi \epsilon_o (n^r a^r + a^r)} \right] \cos \alpha \vec{a}_z = \frac{q}{r \pi \epsilon_o a^r} \times \frac{r(-1)^n}{(n^r + 1)^{\frac{r}{r}}} \vec{a}_z$$

$$E_T = E_o + \sum_{n=1}^{\infty} E_{T_n} = \frac{q}{r \pi \epsilon_o a^r} \left[1 + r \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{(n^r + 1)^{\frac{r}{r}}}}_{-./r} \right] \hat{a}_z = \frac{q}{1 \cdot \pi \epsilon_o a^r} \vec{a}_z$$

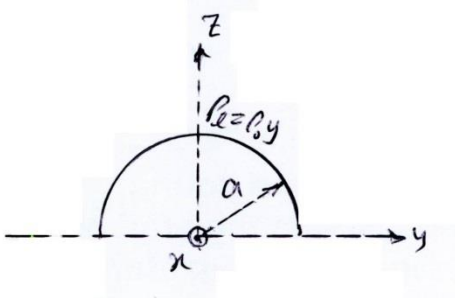
www.nashr-estekhdam.ir

۱۲- گزینه «۲» صحیح است.

$$emf = |B| |V| \ell_e = B V_o (ra)$$

الکترومغناطیس

۱- روی محیط نیم دایره ای به شعاع a و مرکز مبدا مختصات واقع در نیم صفحه $\begin{cases} x=0 \\ z>0 \end{cases}$ بار خطی با چگالی $\rho_l = \rho_0 y$ توزیع شده است. میدان الکتریکی در مبدا مختصات کدام گزینه است؟



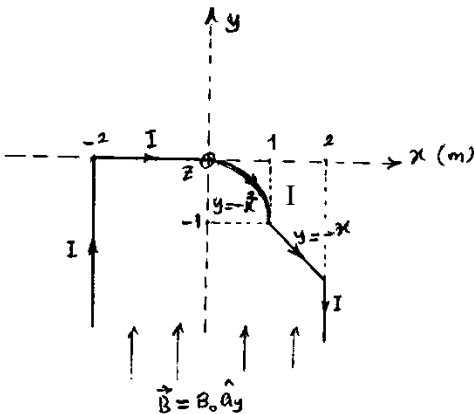
$$\vec{E} = \frac{\rho_0}{8\epsilon_0} (-\hat{a}_y) \quad (1)$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_0}{8\epsilon_0} (-\hat{a}_z) \quad (2)$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_0}{4\epsilon_0} (-\hat{a}_y) \quad (3)$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_0}{4\epsilon_0} (-\hat{a}_z) \quad (4)$$

۲- میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B} = B_0 \hat{a}_y$ در محیط برقرار است. جریان I روی مسیر نشان داده شده در شکل جریان دارد نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان توسط میدان مغناطیسی چقدر است؟



$$\vec{F}_m = 4IB_0 \hat{a}_z \quad (1)$$

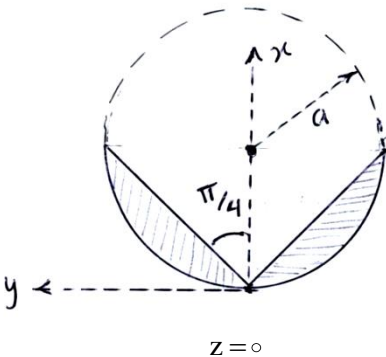
$$\vec{F}_m = 2IB_0 \hat{a}_z \quad (2)$$

$$\vec{F}_m = \sqrt{2}IB_0 \hat{a}_z \quad (3)$$

$$\vec{F}_m = 0 \quad (4)$$

www.nashr-estekhdam.ir

۳- سطح هاشورخورده واقع در صفحه $z=0$ مطابق شکل زیر دارای بار سطحی با چگالی $\rho_s = \rho_0 \cos \phi$ می باشد. پتانسیل الکتریکی در مبدا مختصات کدام گزینه است؟



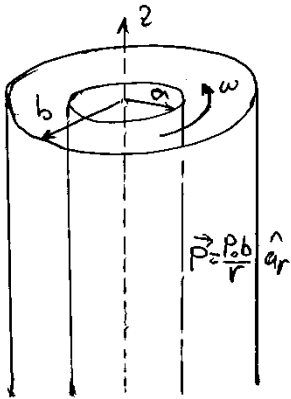
$$V = \frac{\rho_0}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{\pi}{4} - 1 \right) \quad (1)$$

$$V = \frac{\rho_0}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \quad (2)$$

$$V = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\pi}{4} - 1 \right) \quad (3)$$

$$V = \frac{\rho_0}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \quad (4)$$

۴ - عایقی به شکل پوسته استوانه‌ای طویل به شعاع داخلی a و خارجی b پلاریزه شده است و بردار قطبی‌شدگی واحد حجم آن $\vec{P} = \frac{P_0 b}{r} \hat{a}_r$ می‌باشد. این پوسته را حول محور z ها با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخانیم بردار پتانسیل مغناطیسی (\vec{A}) در ناحیه



$a < r < b$ چقدر است؟

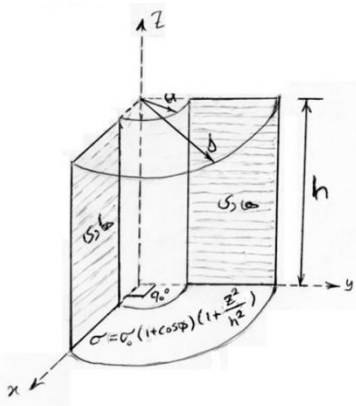
$$\vec{A} = \frac{P_0 b \omega (r^2 - a^2)}{2r} \hat{a}_\phi \quad (1)$$

$$\vec{A} = \frac{P_0 a \omega (b^2 - r^2)}{2r} \hat{a}_\phi \quad (2)$$

$$\vec{A} = \frac{P_0 b \omega (r^2 - a^2)}{2r} \hat{a}_\phi \quad (3)$$

$$\vec{A} = \frac{P_0 a \omega (b^2 - r^2)}{2r} \hat{a}_\phi \quad (4)$$

۵ - با فرض $a, h \gg b$ مقاومت الکتریکی بین صفحات هادی خازن زیر را به دست آورید؟ (راهنمایی: $\cos \phi = 1 + \cos \phi = 2 \cos^2 \frac{\phi}{2}$)



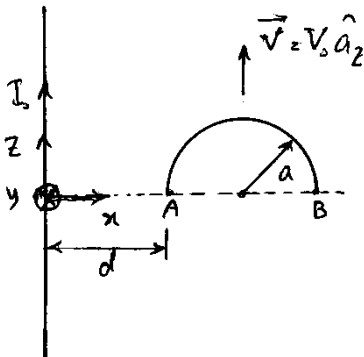
$$R = \frac{4}{2\sigma_0 h \ln \frac{b}{a}} \quad (1)$$

$$R = \frac{2\sqrt{2}}{2\sigma_0 h \ln \frac{b}{a}} \quad (2)$$

$$R = \frac{2\sqrt{2}}{2\sigma_0 h \ln \frac{b}{a}} \quad (3)$$

$$R = \frac{2}{2\sigma_0 h \ln \frac{b}{a}} \quad (4)$$

۶ - جریان خطی I_0 روی محور z ها در جهت $+\hat{a}_z$ برقرار است میله‌ای به شکل نیم‌دایره و شعاع a با سرعت $\vec{V} = V_0 \hat{a}_z$ یکنواخت به موازات محور z ها و به فاصله‌ی d از آن مطابق شکل حرکت می‌کند نیروی محرکه‌ی القایی دو سر میله $(V_A - V_B)$ برابر کدام گزینه است؟



$$V_A - V_B = -\frac{\mu_0 V_0 I_0}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{a}{d} \right) \quad (1)$$

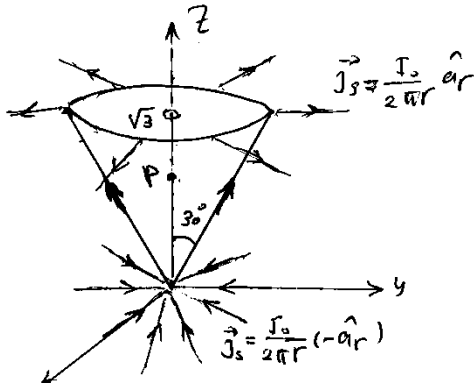
$$V_A - V_B = -\frac{\mu_0 V_0 I_0}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{2a}{d} \right) \quad (2)$$

$$V_A - V_B = -\frac{\mu_0 V_0 I_0}{2\pi} \ln \frac{a}{d} \quad (3)$$

$$V_A - V_B = -\frac{\mu_0 V_0 I_0}{2\pi} \ln \frac{2a}{d} \quad (4)$$

۷- جریان سطحی به مقدار I_0 با چگالی $\vec{J}_s = \frac{I_0}{\sqrt{3}\pi r}(-\hat{a}_r)$ در سطح $z=0$ برقرار است این جریان پس از عبور از سطح جانبی مخروط مطابق شکل در

سطح $z=\sqrt{3}$ با چگالی $\vec{J}_s = \frac{I_0}{\sqrt{3}\pi r}\hat{a}_r$ پخش می‌شود. بردار پتانسیل مغناطیسی \vec{A} در نقطه‌ی $P\left(0,0,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ چقدر است؟



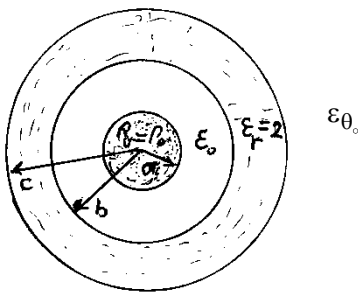
$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \ln(r + \sqrt{3}) \hat{a}_z \quad (1)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \ln(r + \sqrt{3}) \hat{a}_z \quad (2)$$

$$\vec{A} = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I_0}{4\pi} \ln(r + \sqrt{3}) \hat{a}_z \quad (3)$$

$$\vec{A} = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I_0}{4\pi} \ln(r + \sqrt{3}) \hat{a}_z \quad (4)$$

۸- در فضای آزاد کره‌ای به شعاع a و هم‌مرکز با مبداء مختصات با بار حجمی به چگالی یکنواخت ρ_0 پر شده است. اگر فقط ناحیه $b < R < c$ را مطابق شکل با ماده عایقی با $\epsilon_r = 2$ پر کنیم تغییر انرژی سیستم برابر کدام گزینه است؟



$$\frac{4\pi\rho_0 a^3}{9\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) \quad (1)$$

$$\frac{-2\pi\rho_0 a^3}{9\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) \quad (2)$$

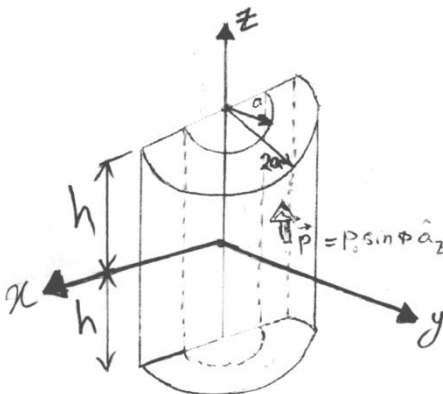
$$\frac{-\pi\rho_0 a^3}{9\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) \quad (3)$$

$$\frac{-\pi\rho_0 a^3}{18\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) \quad (4)$$

www.nashr-estekhdam.ir

۹- پوسته‌ای نیم استوانه با مشخصات $a \leq r \leq 2a$ ، $0 \leq \phi \leq \pi$ و $-h \leq z \leq h$ از ماده پلاریزه شده‌ای با بردار پلاریزاسیون در واحد حجم

$\vec{P} = P_0 \sin \phi \hat{a}_z$ تشکیل شده است و بقیه‌ی نواحی فضای آزاد می‌باشد. میدان الکتریکی در مبداء مختصات چقدر است؟



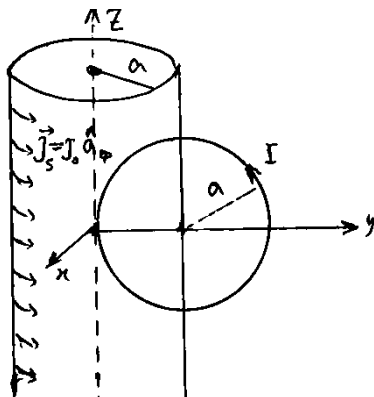
$$\vec{E} = \frac{P_0}{\pi\epsilon_0} \left[\frac{2a}{\sqrt{a^2 + h^2}} - \frac{a}{\sqrt{4a^2 + h^2}} \right] (-\hat{a}_z) \quad (1)$$

$$\vec{E} = \frac{P_0}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{2a}{\sqrt{a^2 + h^2}} - \frac{a}{\sqrt{4a^2 + h^2}} \right] (-\hat{a}_z) \quad (2)$$

$$\vec{E} = \frac{P_0}{\pi\epsilon_0} \left[\frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} - \frac{h}{\sqrt{4a^2 + h^2}} \right] (-\hat{a}_z) \quad (3)$$

$$\vec{E} = \frac{P_0}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} - \frac{h}{\sqrt{4a^2 + h^2}} \right] (-\hat{a}_z) \quad (4)$$

۱۰- در فضای آزاد جریان سطحی با چگالی $\vec{J}_s = J_0 \hat{a}_\phi$ روی سطح استوانه‌ای طویل به شعاع a برقرار است و در محیط حلقه‌ای دایره‌ای به شعاع a و مرکز $(0, a, 0)$ واقع در صفحه‌ی $x=0$ مطابق شکل جریان I در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت دارد. گشتاور وارد بر حلقه‌ی دایره‌ای کدام گزینه می‌باشد؟



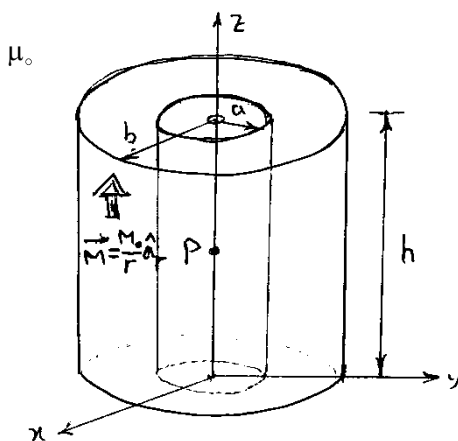
$$\mu_0 \pi a^2 J_0 \hat{a}_y \quad (1)$$

$$\mu_0 \pi a^2 J_0 (-\hat{a}_y) \quad (2)$$

$$\frac{\mu_0 \pi a^2 J_0}{2} \hat{a}_y \quad (3)$$

$$\frac{\mu_0 \pi a^2 J_0}{2} (-\hat{a}_y) \quad (4)$$

۱۱- چگالی شار مغناطیسی (\vec{B}) در نقطه‌ی $P(0, 0, \frac{h}{2})$ ناشی از جسم مغناطیس شده شکل زیر کدام گزینه است؟



$$\begin{cases} \vec{M} = \frac{m_0}{r} \hat{a}_r & a \leq r \leq b, 0 \leq z \leq h \\ \text{و بقیه نواحی فضای آزاد} \end{cases}$$

$$\vec{B} = \mu_0 M_0 \left[\frac{1}{\sqrt{4a^2 + h^2}} - \frac{1}{\sqrt{4b^2 + h^2}} \right] \hat{a}_z \quad (1)$$

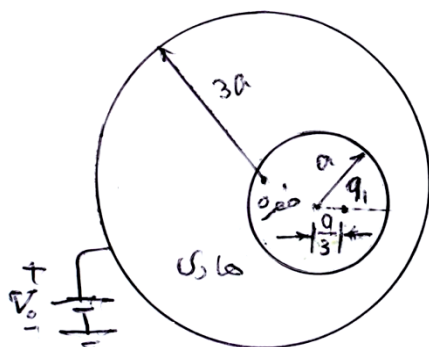
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M_0}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{4a^2 + h^2}} - \frac{1}{\sqrt{4b^2 + h^2}} \right] \hat{a}_z \quad (2)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M_0}{4} \left[\frac{1}{\sqrt{4a^2 + h^2}} - \frac{1}{\sqrt{4b^2 + h^2}} \right] \hat{a}_z \quad (3)$$

(4) صفر

۱۲- حفره کروی به شعاع a در درون هادی کروی به شعاع $3a$ و با پتانسیل ثابت V_0 مطابق شکل ایجاد شده است و بار نقطه‌ای q_1 را به فاصله $\frac{a}{3}$ از مرکز حفره قرار داده‌ایم. اگر بار نقطه‌ای q_1 را به q_2 تغییر داده و به فاصله‌ی $\frac{a}{3}$ از مرکز حفره منتقل کنیم، q_2 چقدر انتخاب شود تا تغییر انرژی

سیستم صفر باشد؟



www.nashr-estekhdam.ir

$$q_2 = \sqrt{\frac{27}{32}} q_1 \quad (1)$$

$$q_2 = \sqrt{\frac{18}{48}} q_1 \quad (2)$$

$$q_2 = \frac{3}{4} q_1 \quad (3)$$

(4) نمی‌توان برای بار q_2 مقداری به دست آورد.

۱ - گزینه ۱ صحیح است.

$$\vec{E} = \int_0^{\pi/2} \frac{\rho_o a \sin \theta \sin \varphi}{\epsilon_o a^2} d\theta = \frac{-\rho_o}{\epsilon_o} \hat{a}_y \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = \frac{\rho_o}{\epsilon_o} (-\hat{a}_y)$$

۲ - گزینه ۱ صحیح است.

$$\vec{F}_m = I \vec{L} \times \vec{B} = I \hat{a}_x \times B_o \hat{a}_y = I B_o \hat{a}_z$$

۳ - گزینه ۴ صحیح است.

$$V = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \frac{\rho_o \cos \phi r dr d\phi}{\epsilon_o r} = \frac{\rho_o}{\epsilon_o} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} r a \cos \phi d\phi = \frac{\rho_o a}{\epsilon_o} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

۴ - گزینه ۳ صحیح است.

$$\rho_{vb} = 0, \quad \rho_{sb} = \vec{P} \cdot \hat{n}_s \Rightarrow \begin{cases} \rho_{sb} = P_o & r = b \\ \rho_{sb} = \frac{-P_o b}{a} & r = a \end{cases}$$

$$\vec{J}_{s_r} = P_o b \omega \hat{a}_\phi \quad r = b, \quad \vec{J}_{s_r} = -P_o b \omega \hat{a}_\phi \quad r = a$$

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \int \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$A \int \pi r = P_o b \omega \pi (r^2 - a^2)$$

$$\vec{A} = \frac{P_o b \omega (r^2 - a^2)}{2r} \hat{a}_\phi \quad a < r < b$$

۵ - گزینه ۱ صحیح است.

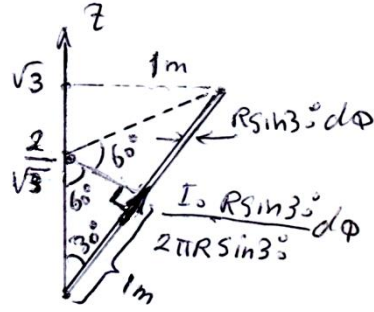
$$R = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\int_a^b \int_0^h \frac{\sigma_o (1 + \cos \phi) \left(1 + \frac{z^2}{h^2} \right) dz dr}{r}} = \frac{1}{\sigma_o \ln \frac{b}{a}} \frac{\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{\phi}{2} \right) d\phi}{\left[z + \frac{z^3}{3h^2} \right]_0^h}$$

$$= \frac{\tan \frac{\phi}{2} \Big|_0^{\pi/2}}{\sigma_o \ln \frac{b}{a} \left(\frac{2}{3} h \right)} = \frac{4}{3 \sigma_o h \ln \frac{b}{a}}$$

۶ - گزینه ۲ صحیح است.

$$V_A - V_B = - \int_{d+a}^d \left(V_o \hat{a}_z \times \frac{\mu_o I_o}{2\pi x} \hat{a}_y \right) \cdot (dx \hat{a}_x + dz \hat{a}_z) = - \frac{\mu_o V_o I_o}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{2a}{d} \right)$$

۷ - گزینه ۳ صحیح است.



$$\vec{J}_s = \frac{I_0}{r\pi R \sin 30^\circ} \hat{a}_R$$

روی سطح جانبی مخروط

$$\vec{A} = \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\mu_0 I_0 \cos 60^\circ}{r\pi R \sin 30^\circ} R \sin 30^\circ d\phi}{4\pi} \ln \left(\frac{1 + \frac{\sqrt{r}}{r}}{1 - \frac{\sqrt{r}}{r}} \right) = \frac{\sqrt{r} \mu_0 I_0}{4\pi} \ln \left(\frac{r + \sqrt{r}}{r - \sqrt{r}} \right) \hat{a}_z = \frac{\sqrt{r} \mu_0 I_0}{4\pi} \ln(r + \sqrt{r}) \hat{a}_z$$

۸ - گزینه ۳ صحیح است.

فقط انرژی ناحیه $b < R < c$ تغییر می کند.

$$\Delta W_e = W_{e_r} - W_{e_i} = \frac{\epsilon \pi}{r} \int_b^c \left[\frac{\rho_0 \frac{\epsilon}{r} \pi a^r}{\epsilon \pi R^r} \right] R^r dR \left(\frac{1}{r\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \right) = -\frac{\pi \rho_0^2 a^6}{9\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right)$$

۹ - گزینه ۳ صحیح است.

$$\rho_{sb} = \vec{P} \cdot \hat{n}_s \Rightarrow \begin{cases} \rho_{sb} = P_0 \sin \phi & z = h, a \leq r \leq ra, 0 \leq \phi \leq \pi \\ \rho_{sb} = -P_0 \sin \phi & z = 0, a \leq r \leq ra, 0 \leq \phi \leq \pi \end{cases}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{r} \int_a^{ra} \int_0^\pi \frac{P_0 \sin \phi' (r - r' \hat{a}_r - h \hat{a}_z)}{\epsilon \pi \epsilon_0 (r'^2 + h^2)^{\frac{r}{2}}} = \frac{P_0 h}{r \pi \epsilon_0} [-\cos \phi']_0^\pi \left[\frac{-1}{\sqrt{r'^2 + h^2}} \right]_a^{ra} (-\hat{a}_z)$$

$$= \frac{P_0}{\pi \epsilon_0} \left[\frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} - \frac{h}{\sqrt{ra^2 + h^2}} \right] (-\hat{a}_z)$$

۱۰ - گزینه ۴ صحیح است.

$$\vec{T} = \frac{\pi a^2 I}{r} \hat{a}_x \times \mu_0 J_0 \hat{a}_z = \frac{\mu_0 \pi a^2 I J_0}{r} (-\hat{a}_y)$$

۱۱ - گزینه ۴ صحیح است.

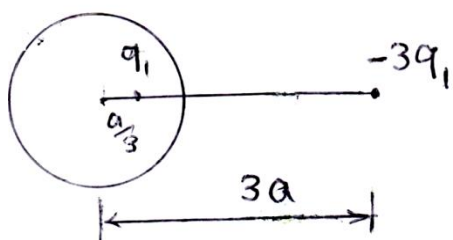
$$\vec{J}_{sm} \Big|_{z=h} = \frac{M_0}{r} \hat{a}_r \times \hat{a}_z = \frac{M_0}{r} (-\hat{a}_\phi)$$

$$\vec{J}_{sm} \Big|_{z=0} = \frac{M_0}{r} \hat{a}_r \times (-\hat{a}_z) = \frac{M_0}{r} \hat{a}_\phi$$

www.nashr-estekhdam.ir

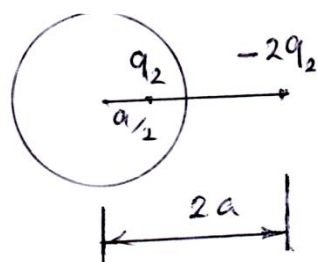
در نقطه‌ی P, $\vec{B} = 0$ است. چون \vec{B} ناشی از دو جریان سطحی در نقطه‌ی P اثر یکدیگر را خنثی می کنند.

۱۲ - گزینه ۱ صحیح است.



$$W_{e_1} = \frac{1}{2} q_1 V_1 = \frac{-r q_1^2}{2 \times 4 \pi \epsilon_0 \left(r a - \frac{a}{2} \right)}$$

www.nashr-estekhdam.ir



$$W_{e_2} = \frac{-r q_2^2}{2 \times 4 \pi \epsilon_0 \left(r a - \frac{a}{2} \right)}$$

$$\Delta W_e = W_{e_1} - W_{e_2} = 0 \Rightarrow \frac{r q_1^2}{\frac{1}{r}} = \frac{r q_2^2}{\frac{1}{r}} \Rightarrow q_2 = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} q_1$$

الکترومغناطیس

۱ - سیم هادی به طول ۲ متر روی محور z به طور متقارن در صفحه $x = 0$ دارای

توزیع جریان I به صورت مثلثی و در امتداد محور z می باشد. جریان در $z = 0$

حداکثر و برابر با I_0 (بر حسب آمپر) و در $z = -1\text{m}$ و $z = 1\text{m}$ برابر با صفر

است. کار انجام شده برای حرکت دادن این سیم به طور موازی در صفحه $x = 0$

به نقطه $y = 1\text{m}$ در میدان مغناطیسی $\left(\frac{wb}{m}\right) \hat{a}_x (e^{-1/y})$ ، $\vec{B} = 10^{-4}$ ، کدام

است؟

$$(1) \quad -10^{-3} I_0 \frac{1-e}{e}$$

$$(2) \quad -10^{-3} I_0 \frac{e-1}{e}$$

$$(3) \quad 2 \times 10^{-3} I_0 \frac{1-e}{e}$$

$$(4) \quad 2 \times 10^{-3} I_0 \frac{e-1}{e}$$

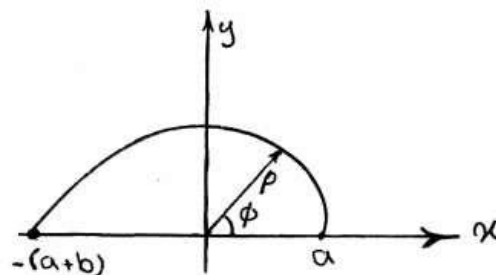
۲ - یک قطعه سیم به شکل مارپیچ ارشمیدس خم گردیده که معادله آن توسط

$\rho = a + \frac{b}{\pi} \phi$ ($0 \leq \phi \leq \pi$) در دستگاه مختصات استوانه‌ای داده می شود.

سیم در صفحه xy قرار دارد و مطابق شکل حامل جریان I می باشد. میدان

مغناطیسی \vec{B} در مبدا مختصات، کدام است؟

www.nashr-estekhdam.ir



$$(1) \quad \frac{\mu_0 I}{4b} \left(1 + \frac{b}{a}\right) \hat{a}_z$$

$$(2) \quad \frac{\mu_0 I}{\pi b} \left(1 + \frac{b}{a}\right) \hat{a}_z$$

$$(3) \quad \frac{\mu_0 I}{4b} \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \hat{a}_z$$

$$(4) \quad \frac{\mu_0 I}{\pi b} \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \hat{a}_z$$

۳ - باری با چگالی $\rho_s = \rho_0 (x^2 + y^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{c}{m} \right)$ روی مربع واقع شده در

$-1 \leq x \leq 1$ و $-1 \leq y \leq 1$ و $z = -1$ قرار گرفته است. شدت

میدان الکتریکی در مبدأ مختصات چند ولت بر متر است؟

$$\frac{\rho_0}{\pi \epsilon_0} \quad (۲)$$

$$\frac{\rho_0}{2\pi \epsilon_0} \quad (۱)$$

$$\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \quad (۴)$$

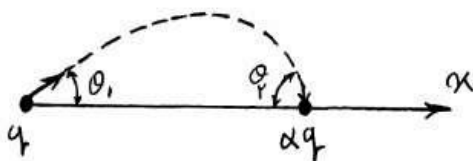
$$\frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \quad (۳)$$

۴ - دو بار q و αq روی محور x قرار گرفته‌اند یک خط میدان در زیر رسم شده

است. اگر زاویه خط میدان وقتی که از بار q خارج می‌شود θ_1 باشد، زاویه

(θ_2) آن هنگامی که به بار q فرود می‌آید با محور x کدام است؟ (α عددی

منفی است.)



$$\theta_2 = |\alpha| \theta_1 \quad (۱)$$

$$\theta_2 = \frac{1}{|\alpha|} \theta_1 \quad (۲)$$

$$\theta_1 = \cos^{-1} \left(1 - \frac{1 + \cos \theta_2}{|\alpha|} \right) \quad (۳)$$

$$\theta_2 = \cos^{-1} \left(1 - \frac{1 - \cos \theta_1}{|\alpha|} \right) \quad (۴)$$

۵ - چگالی سطحی بار روی یک دیسک هادی نازک به شعاع a که باردار شده به

صورت $\rho_s = \frac{a\epsilon_0}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}$ می باشد. (ρ فاصله از مرکز دیسک است).

انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی اطراف دیسک چقدر است؟

$$\begin{array}{ll} \frac{\pi^2}{4} \epsilon_0 a^3 & (1) \\ \pi^2 \epsilon_0 a^3 & (3) \\ \frac{\pi^2}{2} \epsilon_0 a^3 & (2) \\ 2\pi^2 \epsilon_0 a^3 & (4) \end{array}$$

۶ - یک سیم بی نهایت طویل حامل جریان I ، مطابق شکل زیر، منطبق بر محور z و در

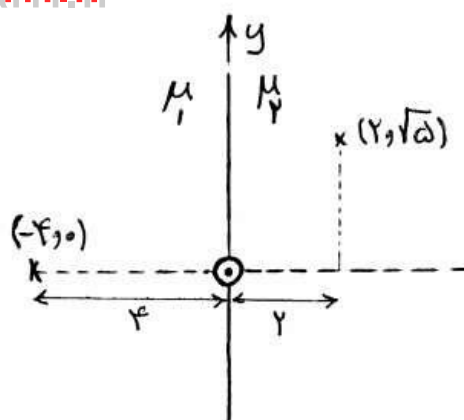
مرز دو محیط با ضرایب نفوذپذیری $\mu_1 = 2\mu_0$ و $\mu_2 = 3\mu_0$ قرار دارد. مرز دو

ناحیه بر صفحه $x=0$ منطبق است. شدت میدان مغناطیسی (H_1) در

در $(x_1 = 2, y_1 = \sqrt{5})$ چند برابر شدت میدان مغناطیسی (H_2) در

$(x_2 = -4, y_2 = 0)$ است؟

www.nashr-estekhdam.ir



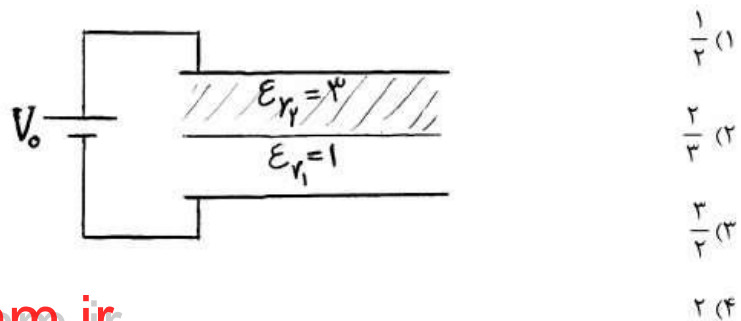
$$\frac{1}{9} \quad (1)$$

$$\frac{4}{3} \quad (2)$$

$$\frac{9}{8} \quad (3)$$

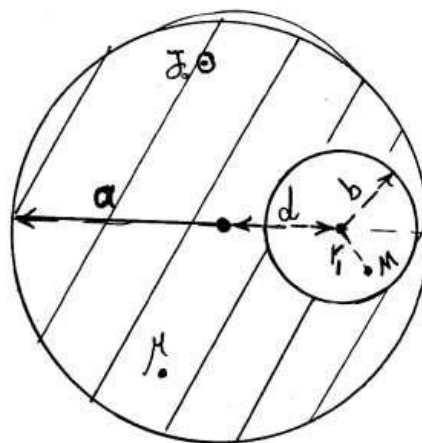
$$2 \quad (4)$$

- ۷ - فضای میان یک خازن صفحه موازی متصل به پتانسیل V_0 از هوا ($\epsilon_{r1} = 1$) پر شده است. اگر نیمی از خازن را مطابق شکل زیر از ماده عایقی با ضریب گذردهی $\epsilon_{r2} = 3$ پر کنیم میدان در ناحیه هوا چند برابر می شود؟



www.nashr-estekhdam.ir

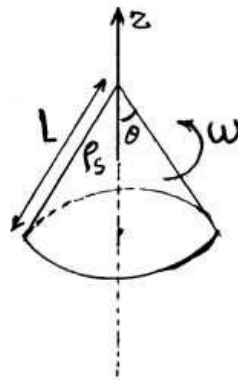
- ۸ - درون یک هادی استوانه‌ای طویل به شعاع a و نفوذپذیری μ_0 ، حفره استوانه‌ای طویلی، موازی محور استوانه هادی و به شعاع b ($b \ll a$) ایجاد کرد. فاصله محور دو استوانه را d می نامیم. چنانچه جریان یکنواختی با چگالی $J_0 \left(\frac{A}{m^2} \right)$ در هادی برقرار کنیم، اندازه چگالی شار مغناطیسی $|\vec{B}|$ در نقطه فرضی M ، به فاصله r_1 از محور حفره استوانه‌ای ($r_1 < b$)، کدام است؟



- (۱) $\frac{\mu_0 J_0 d}{2}$
- (۲) $\frac{\mu_0 J_0 r_1}{2}$
- (۳) $\frac{\mu_0 J_0 d}{2\pi a}$
- (۴) $\frac{\mu_0 J_0 r_1}{2\pi b}$

۹ - یک پوسته نازک مخروطی شکل با زاویه رأس 2θ و طول یال L حامل بار سطحی یکنواخت با چگالی ρ_s است. مخروط حول محور تقارن خود با سرعت زاویه‌ای $\omega \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$ می‌چرخد. چگالی شار مغناطیسی \vec{B} در رأس مخروط کدام

است؟



$$(1) \frac{1}{2} \mu_0 \rho_s \omega L \sin^3 \theta \hat{a}_z$$

$$(2) \frac{1}{2} \mu_0 \rho_s \omega L \sin^3 \theta \cos \theta \hat{a}_z$$

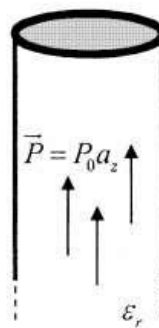
$$(3) \frac{1}{2} \mu_0 \rho_s \omega L \sin^3 \theta (1 - \cos \theta) \hat{a}_z$$

(۴) نامحدود است.

۱۰ - اگر میدان الکتریکی خارجی سبب قطبی شدگی استوانه نیمه بی‌نهایت دی الکتریک با ثابت دی الکتریک ϵ_r به صورت $\vec{p} = p_0 \hat{a}_z$ مطابق شکل زیر شود.

پتانسیل در لبه قاعده بالایی (محیط دایره) کدام است؟

www.nashr-estekhdam.ir



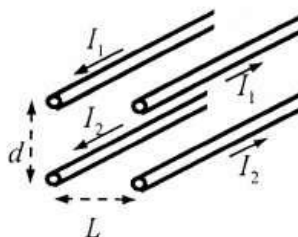
$$(1) -\frac{p_0 a}{2 \epsilon_0}$$

$$(2) \frac{p_0 a}{\pi \epsilon_0}$$

$$(3) \frac{p_0}{a \pi \epsilon_0}$$

$$(4) \frac{p_0 a}{2 \epsilon_0}$$

- ۱۱- در شکل زیر ضریب القاء متقابل در واحد طول، بین ۲ زوج سیم (سیم‌های بالایی زوج اول و سیم‌های پایینی زوج دوم) کدام است؟ (سیم‌های بالایی دقیقاً بالای سیم‌های پایینی و به فاصله d از آنها قرار دارند).



$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(1 - \frac{d^2}{L^2}\right) \quad (1)$$

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(1 - \frac{L^2}{d^2}\right) \quad (2)$$

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{d^2}{L^2}\right) \quad (3)$$

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{L^2}{d^2}\right) \quad (4)$$

www.nashr-estekhdam.ir

- ۱۲- اگر روی صفحه $x = 0$ بار سطحی با چگالی $\rho_s = \rho_0 \cos \alpha_1 y \cos \alpha_2 z$

توزیع شده باشد پتانسیل الکتریکی (V_1) در $x > 0$ ، کدام است؟

$$\frac{\rho_0}{2\epsilon_0(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} e^{-(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)x} \cos \alpha_1 y \cos \alpha_2 z \quad (1)$$

$$\frac{2\rho_0}{\epsilon_0(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} e^{-(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)x} \cos \alpha_1 y \cos \alpha_2 z \quad (2)$$

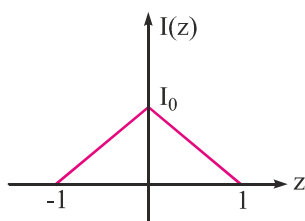
$$\frac{\rho_0(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)}{4\epsilon_0} e^{-(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)x} \cos \alpha_1 y \cos \alpha_2 z \quad (3)$$

$$\frac{4\rho_0(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)}{\epsilon_0} e^{-(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)x} \cos \alpha_1 y \cos \alpha_2 z \quad (4)$$

پاسخ تشریحی

۱. گزینه ۲ درست است.

برای یک y مین:



$$\begin{aligned}\bar{F}_m &= \int d\bar{l} \times \bar{B} \\ &= \int_{-1}^1 I(z) dz \hat{z} \times 10^{-4} e^{-0.1y} \hat{x} \\ &= \hat{y} 10^{-4} e^{-0.1y} \underbrace{\int_{-1}^1 I(z) dz}_{I_0}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{F}_m = \hat{y} 10^{-4} e^{-0.1y} I_0$$

$$\Rightarrow W = \int \bar{F}_m \cdot d\bar{\ell} = \int_0^{10} 10^{-4} e^{-0.1y} I_0 dy = 10^{-3} I_0 (1 - e^{-1}) = 10^{-3} I_0 \left(\frac{e-1}{e} \right)$$

چون سیستم به وضعیتی با انرژی کمتر رفته است، طبق قرارداد باید علامت کار آن منفی باشد:

$$W = -10^{-3} I_0 \frac{e-1}{e}$$

۲. گزینه ۳ درست است.

$$\begin{aligned}\bar{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{d\bar{l} \times \bar{\Pi}}{\Pi^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\bar{\ell}' \times (-\hat{r}' \hat{r}')}{r'^3} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{(r' d\phi' \hat{\phi}' + dr' \hat{r}') \times (-\hat{r}')}{r'^2} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi d\phi' \frac{1}{r'} \hat{z} = \hat{z} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{d\phi'}{a + \frac{b}{\pi} \phi'}\end{aligned}$$

$$= \hat{z} \frac{\mu_0 I}{4b} \text{Ln} \left(a + \frac{b}{\pi} \varphi' \right) \Big|_0^\pi = \hat{z} \frac{\mu_0 I}{4b} \text{Ln} \frac{a+b}{a}$$

۳. گزینه ۲ درست است.

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_s \bar{\Pi} ds'}{\Pi^3} \\ &= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-1}^1 \int \frac{\left(x'^2 + y'^2 + 1 \right)^{\frac{3}{2}} \left(\bar{0} - x' \hat{x} - y' \hat{y} + 1 \hat{z} \right) dx' dy'}{\left(x'^2 + y'^2 + 1 \right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \underbrace{- \int_{-1}^1 \int x' dx' dy'}_{\text{تابع فرد} \Rightarrow \text{انتگرال صفر}} \hat{x} - \underbrace{\int_{-1}^1 \int y' dx' dy'}_{\text{تابع فرد} \Rightarrow \text{انتگرال صفر}} \hat{y} + \int_{-1}^1 \int dx' dy' \right\} \\ \Rightarrow \bar{E} &= \hat{z} \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-1}^1 \int dx' dy' = \hat{z} \frac{\rho_0}{\pi\epsilon_0} \end{aligned}$$

۴. گزینه ۴ درست است.

شار در نزدیکی هر بار، فقط به میدان همان بار مربوط است؛ از طرفی شار موجود در یک tube نیرو ثابت است:

$$\begin{aligned} \frac{q}{2} (1 - \cos \theta_1) &= \frac{\alpha q}{2} (1 - \cos \theta_2) \\ \Rightarrow 1 - \cos \theta_2 &= \frac{1}{\alpha} (1 - \cos \theta_1) \\ \Rightarrow \theta_2 &= \cos^{-1} \left(1 - \frac{1}{\alpha} (1 - \cos \theta_1) \right) \end{aligned}$$

۵. گزینه ۱ درست است.

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \int \rho_s V ds \xrightarrow{\text{جسم هادی}} W_e = \frac{1}{2} V \int \rho_s ds \\ \Rightarrow W_e &= \frac{1}{2} Q_s V \end{aligned}$$

www.nashr-estekhdam.ir

$$\begin{aligned} Q_s &= \int \rho_s ds = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{a\epsilon_0}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr d\varphi = 2\pi a\epsilon_0 \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} \\ &= 2\pi a\epsilon_0 \sqrt{a^2 - r^2} \Big|_a^0 = 2\pi a^2 \epsilon_0 \end{aligned}$$

محاسبه V برای یک نقطه دلخواه روی دیسک مشکل است اما برای مرکز:

$$V_{\text{مرکز}} = \int \frac{\rho_s ds}{4\pi\epsilon_0 \Pi} = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\frac{a\epsilon_0}{\sqrt{r'^2 - a^2}} r' dr' d\varphi'}{4\pi\epsilon_0 r'} = \frac{a}{2} \int_0^a \frac{dr'}{\sqrt{r'^2 - a^2}}$$

$$= \frac{a}{2} \sin^{-1} \left(\frac{r'}{a} \right) \Big|_0^a = \frac{a}{2} \sin^{-1} 1 = \frac{a}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{a\pi}{4}$$

$$\Rightarrow W_e = \frac{1}{2} Q_s V = \frac{1}{2} Q_s V_{مرکز}$$

$$= \frac{1}{2} 2\pi a^2 \epsilon_0 \frac{\pi a}{4} = \frac{\pi^2 a^3 \epsilon_0}{4}$$

۶. گزینه ۱ درست است.

برای یک جریان قرار گرفته روی مرز بین دو محیط همگن، تنها جریان مقیدی که ایجاد می شود یک خط جریان منطبق بر خود جریان اصلی است؛ یعنی مادل فضای آزاد مسئله به صورت زیر است:

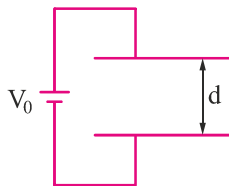
$$\begin{aligned} \mu_0 \\ \odot \Rightarrow \bar{B} &= \frac{\mu_0 (I + I')}{2\pi r} \phi' \\ I + I' \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\bar{B}_r| = \frac{\mu_0 (I_1 + I')}{2\pi \sqrt{4+5}} = \frac{\mu_0 (I + I')}{6\pi}, \quad |\bar{B}_2| = \frac{\mu_0 (I_1 + I')}{2\pi(4)} = \frac{\mu_0 (I + I')}{8\pi}$$

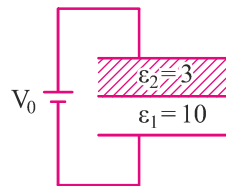
$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} |\bar{H}_1| &= \frac{|\bar{B}_1|}{\mu_2} = \frac{\mu_0 (I_1 + I')}{6\pi \times 3\mu_0} = \frac{I + I'}{18\pi} \\ |\bar{H}_2| &= \frac{|\bar{B}_2|}{\mu_1} = \frac{\mu_0 (I + I')}{8\pi \times 2\mu_0} = \frac{I + I'}{16\pi} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{|\bar{H}_1|}{|\bar{H}_2|} = \frac{8}{9}$$

www.nashr-estekhdam.ir

۷. گزینه ۳ درست است.



$$E = \frac{V_0}{d} \quad (I)$$



$$\begin{cases} E_2 \frac{d}{2} + E_1 \frac{d}{2} = V_0 \\ \epsilon_2 E_2 = \epsilon_1 E_1 \Rightarrow 3E_2 = E_1 \end{cases} \Rightarrow E_1 = \frac{3}{2} \frac{V_0}{d} \quad (II)$$

$$(I), (II) \Rightarrow \frac{E_1}{E} = \frac{3}{2}$$

۸. گزینه ۱ درست است.

درون یک استوانه با توزیع جریان یکنواخت J_0 :

$$B 2\pi r = \mu_0 J_0 \pi r^2 \Rightarrow \bar{B} = \frac{\mu_0 J_0 r}{2} \hat{\phi}$$

با استفاده از جمع آثار در مسئله، مثل این است که دو استوانه با جریان های J_0 و $-J_0$ داریم:

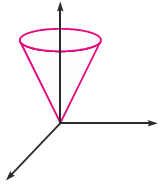
$$\begin{aligned} \bar{B} &= \bar{B}_1 + \bar{B}_2 \\ &= \frac{\mu_0 J_0}{2} (r_1 \hat{\phi}_1 - r_2 \hat{\phi}_2) \\ &= \frac{\mu_0 J_0}{2} \hat{z} \times (r_1 \hat{r}_1 - r_2 \hat{r}_2) = \frac{\mu_0 J_0}{2} \hat{z} \times (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \end{aligned}$$

$$= \frac{\mu_0 J_0}{2} \hat{z} \times \hat{d} d \Rightarrow |\bar{B}| = \frac{\mu_0 J_0 d}{2}$$

۹. گزینه ۱ درست است.

اگر جهت محور z را عوض کنیم:

$$\begin{aligned} \bar{k} &= \rho_s \bar{v} = \rho_s \bar{\omega} \times \bar{r} \\ &= \rho_s (-\omega \hat{z}) \times (R' \sin \theta_0 \hat{r}') \\ &= -\rho_s \omega R' \sin \theta_0 \hat{\phi}' \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \bar{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\bar{k} ds' \times \bar{\Pi}}{\Pi^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{(-\rho_s \omega R' \sin \theta_0 \hat{\phi}' dR' R' \sin \theta_0 d\phi') \times (\bar{0} - R' \hat{r}')}{R'^3} \\ &= \frac{+\mu_0 \rho_s \omega \sin^2 \theta_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^L (\hat{\phi}' \times \hat{r}') dR' d\phi' \\ &= \frac{\mu_0 \rho_s \omega \sin^2 \theta_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^L \hat{\theta}' dR' d\phi' \\ &= \frac{\mu_0 \rho_s \omega \sin^2 \theta_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^L [-\sin \theta_0 \hat{z} + \cos \theta_0 (\cos \phi' \hat{x} + \sin \phi' \hat{y})] \end{aligned}$$

انتگرال روی ϕ' برای \hat{x} و \hat{y} صفر می‌شود:

$$\begin{aligned} \bar{B} &= \frac{-\mu_0 \rho_s \omega \sin^3 \theta_0}{4\pi} \hat{z} \int_0^{2\pi} \int_0^L dR' d\phi' \\ &= -\hat{z} \frac{\mu_0 \rho_s \omega L \sin^3 \theta_0}{2} \end{aligned}$$

با چرخاندن دستگاه مختصات به حالت اولیه:

$$\bar{B} = \hat{z} \frac{1}{2} \mu_0 \rho_s \omega L \sin^3 \theta_0$$

۱۰. گزینه ۲ درست است.

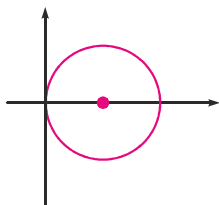
$$\rho_{bv} = -\nabla \cdot \bar{P} = 0$$

$$\rho_{bs} \Big|_{r=a} = P_0, \hat{z} \cdot \hat{r} = 0$$

$$\rho_{bs} \Big|_{z=0} = P_0 \hat{z} \cdot \hat{z} = P_0$$

www.nashr-estekhdam.ir

بنابراین یک دیسک با چگالی بار یکنواخت P_0 داریم و پتانسیل را روی یک نقطه از محیط آن نیاز داریم:



$$\begin{aligned} V &= \iint \frac{P_0 r' dr' d\phi'}{4\pi \epsilon_0 r'} \\ &= \frac{P_0}{4\pi \epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{R_\phi} dr' d\phi' \end{aligned}$$

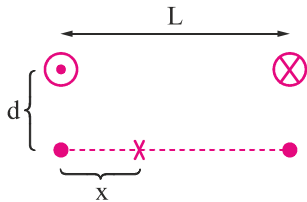
$$R_{\varphi} = 2a \cos \varphi'$$

$$\Rightarrow V = \frac{P_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2a \cos \varphi' d\varphi'$$

$$= \frac{aP_0}{2\pi\epsilon_0} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi' d\varphi' = \frac{aP_0}{\pi\epsilon_0}$$

۱۱. گزینه ۴ درست است.

اگر شار یکی از جریان‌ها را حساب کنیم کافی است؛
چرا که شار هر دو یکسان است.



$$\varphi = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int B_n ds$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{x^2 + d^2}} \hat{\phi}_1 \Rightarrow B_n = \frac{\mu_0 I x}{2\pi(x^2 + d^2)}$$

$$\Rightarrow \int_0^L \frac{\mu_0 I x}{2\pi(x^2 + d^2)} dx = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln(x^2 + d^2) \Big|_0^L$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln\left(\frac{L^2 + d^2}{d^2}\right)$$

$$\Rightarrow \varphi_t = 2\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{L^2}{d^2} + 1\right)$$

$$\Rightarrow M = \frac{\varphi_t}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{L^2}{d^2}\right)$$

www.nashr-estekhdam.ir

۱۲. گزینه ۱ درست است.

فرم پتانسیل برای ناحیه بالا و پایین به صورت زیر است:

$$\left. \begin{aligned} V_{up} &= A e^{-\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} x} \cos \alpha_1 y \cos \alpha_2 z \\ V_{down} &= A e^{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} x} \cos \alpha_1 y \cos \alpha_2 z \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_{1n} - D_{2n} = \rho_s$$

$$\Rightarrow \epsilon_0 \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial x} \right) = \rho_s \Rightarrow \left(\frac{\partial V_{down}}{\partial x} - \frac{\partial V_{up}}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}$$

$$2A \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \cos \alpha_1 y \cos \alpha_2 z = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cos \alpha_1 y \cos \alpha_2 z$$

$$\Rightarrow A = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0 \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}$$

$$\Rightarrow V_{\text{up}} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} e^{-\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} x} \cos \alpha_1 y \cos \alpha_2 z$$

توضیح در گزینه‌ها اشتباهاً $\sqrt{\quad}$ جا افتاده است.

الکترومغناطیس

۱. صفحه‌ی $z=0$ شامل بار سطحی غیریکنواخت $\rho_s = ay^2 \left(\frac{C}{m^2} \right)$ می‌باشد. کل باری که در کره‌ای به شعاع

www.nashr-estekhdam.ir

یک متر و به مرکز $(0,0,0.5)$ واقع شده، کدام است؟

$$Q = \frac{9\pi a}{64} \quad (۴) \quad Q = \frac{3\pi a}{64} \quad (۳) \quad Q = \frac{3\pi a}{32} \quad (۲) \quad Q = \frac{9\pi a}{32} \quad (۱)$$

۲. بارهای نقطه‌ای مثبت Q_i در نقاط $(0,0,z_i)$ قرار گرفته‌اند. با فرض $Q_i = \frac{1}{3^i} (C)$ و $z_i = 3^i (m)$ ،

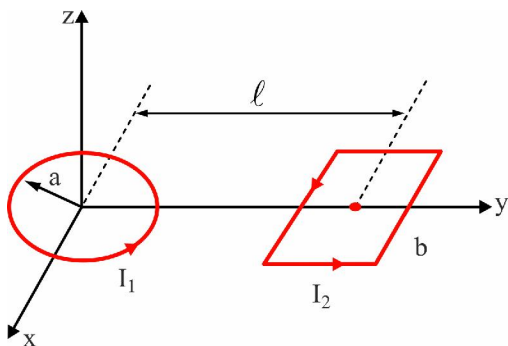
$i=0,1,2,\dots$ مقدار پتانسیل در مبدأ مختصات کدام است؟ فرض کنید پتانسیل در بی‌نهایت برابر صفر باشد.

$$V = \frac{3}{32\pi\epsilon_0} \quad (۴) \quad V = \frac{9}{32\pi\epsilon_0} \quad (۳) \quad V = \frac{9}{16\pi\epsilon_0} \quad (۲) \quad V = \frac{3}{16\pi\epsilon_0} \quad (۱)$$

۳. در شکل زیر، در یک حلقه‌ی دایره‌ای کوچک به شعاع a جریان I_1 جاری است؛ و حلقه‌ی مربعی کوچک به

ضلع b با جریان I_2 در فاصله‌ی ℓ از آن قرار دارد؛ به طوری که $a, b \ll \ell$ هستند و می‌توان میدان‌های حلقه‌ها

را روی یکدیگر ثابت فرض نمود، گشتاور مغناطیسی وارد بر حلقه‌ی مربعی، کدام است؟



$$-\frac{\mu_0 \pi a^2 b^2 I_1 I_2}{4 \ell^3} \hat{a}_x \quad (۱)$$

$$-\frac{\mu_0 a^2 b^2 I_1 I_2}{4 \ell^3} \hat{a}_x \quad (۲)$$

$$-\frac{\mu_0 \pi a^2 b^2 I_1 I_2}{2 \ell^2} \hat{a}_x \quad (۳)$$

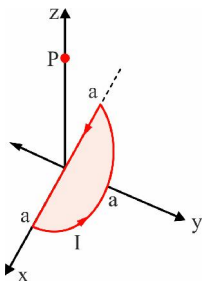
$$-\frac{\mu_0 \pi a^2 b^2 I_1 I_2}{2 \ell} \hat{a}_x \quad (۴)$$

۴. بین دو پوسته‌ی کروی رسانا ($a < r < b$) از ماده‌ای با رسانایی $\sigma(r) = \frac{\sigma_0}{r^2}$ پر شده است، که در آن r شعاع دستگاه کروی و a, b و σ_0 مقادیر ثابتی هستند. اگر سطح $r=a$ در پتانسیل صفر و سطح $r=b$ در پتانسیل V_0 باشد، چگالی جریان در این ناحیه کدام است؟

$$\vec{J} = \frac{-\sigma_0 V_0}{r(b-a)} \hat{a}_r \quad (۴) \quad \vec{J} = \frac{-\sigma_0 V_0}{r^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \hat{a}_r \quad (۳) \quad \vec{J} = \frac{-\sigma_0 V_0}{r \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \hat{a}_r \quad (۲) \quad \vec{J} = \frac{-\sigma_0 V_0}{r^2(b-a)} \hat{a}_r \quad (۱)$$

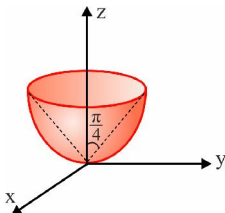
۵. حلقه‌ی جریان شامل یک نیم دایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع a و یک پاره‌خط به طول $2a$ هر دو، روی صفحه‌ی xy مطابق شکل زیر داده شده است. اگر بدانیم $\int \frac{d\alpha}{\cos \alpha} = \ln\left(\frac{1+\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)$ است؛ پتانسیل مغناطیسی

بردار در نقطه‌ی $P(0,0,a)$ کدام است؟



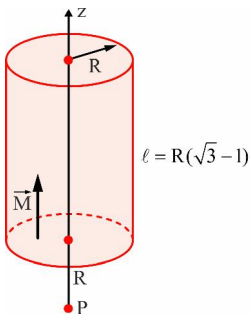
$$\frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\ln \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} - \sqrt{2} \right] \hat{a}_x \quad (۲) \quad \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[2 \ln \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \right] \hat{a}_x \quad (۱) \\ \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\ln \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2} \right] \hat{a}_x \quad (۴) \quad \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\ln \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \right] \hat{a}_x \quad (۳)$$

۶. مطابق شکل زیر، حفره‌ای به شکل مخروط با زاویه‌ی بازشدگی $\frac{\pi}{4}$ از نیم کره‌ای با چگالی حجمی یکنواخت ρ_0 از بار الکتریکی، به شعاع a و مرکز منطبق بر $z=a$ خارج شده است. میدان الکتریکی در مبدأ مختصات برابر کدام است؟



$$-\frac{\rho_0 a}{8\epsilon_0} \hat{a}_z \quad (۲) \quad -\frac{\rho_0 a}{12\epsilon_0} \hat{a}_z \quad (۱) \\ -\frac{\rho_0 a\sqrt{2}}{8\epsilon_0} \hat{a}_z \quad (۴) \quad -\frac{\rho_0 a\sqrt{2}}{12\epsilon_0} \hat{a}_z \quad (۳)$$

۷. یک استوانه به شعاع R و طول $\ell = R(\sqrt{3}-1)$ از جنس ماده‌ی مغناطیسی Magnetization یکنواخت و $\vec{M} = M_0 \hat{a}_z$ مطابق شکل زیر وجود دارد. مقدار \vec{B} (بردار اندکسیون مغناطیسی) در نقطه‌ی P روی محور استوانه به اندازه‌ی R پایین‌تر از آن، چقدر است؟



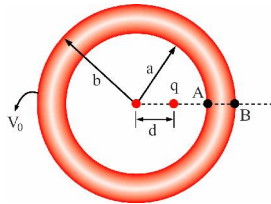
$$B_z = \frac{\mu_0 M_0}{4} (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \quad (۱)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 M_0}{4} (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \quad (۲)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 M_0}{2} (\sqrt{3} - 1) \quad (۳)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 M_0}{2} (\sqrt{3} + 1) \quad (۴)$$

۸. یک پوسته‌ی رسانای کروی به شعاع داخلی a و خارجی b ، مطابق شکل، در پتانسیل V_0 نگهداشته شده است. بار نقطه‌ای q در فاصله‌ی d ($d < a$) از مرکز پوسته‌های کروی واقع است. چگالی بار سطحی در نقاط A و B به ترتیب کدام است؟



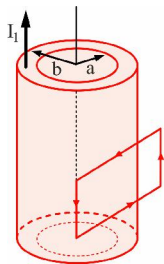
$$\frac{2\varepsilon_0 V_0}{a+b}, \frac{-q}{4\pi b(b-d)} \quad (2)$$

$$\frac{2\varepsilon_0 V_0}{a+b}, \frac{-q}{4\pi a(a-d)} \quad (1)$$

$$\frac{\varepsilon_0 V_0}{b}, \frac{-q(a+d)}{4\pi a(a-d)^2} \quad (4)$$

$$\frac{\varepsilon_0 V_0}{a+b}, \frac{-q(b+d)}{4\pi b(b-d)} \quad (3)$$

۹. در ناحیه استوانه‌ای بی‌نهایت طول $a < r < b$ و $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ، جریان I_1 با توزیع یکنواخت در جهت موازی محور z مطابق شکل جاری است. در حلقه‌ی مربعی به ضلع $2b$ جریان I_2 جاری است؛ و یک ضلع مربع روی محور استوانه قرار دارد. نیروی وارد بر این قاب مربعی کدام است؟



$$\frac{I_1 I_2}{2\pi} \quad (2)$$

$$\frac{I_1 I_2}{2\pi b} \quad (1)$$

$$\frac{I_1 I_2}{4\pi b} \quad (4)$$

$$\frac{I_1 I_2}{\pi b} \quad (3)$$

www.nashr-estekhdam.ir

۱۰. در مختصات کروی، چگالی جریان الکتریکی به صورت زیر در یک محیط هادی مفروض است:

$$\vec{J} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \hat{a}_r - \frac{1}{r^2} \hat{a}_\varphi \left(\frac{A}{m^2} \right)$$

کل جریانی که در جهت \hat{a}_z از یک دیسک دایره‌ای به شعاع R به مرکز محور z و مستقر در $z = h$ می‌گذرد، کدام است؟ فرض کنید $h \gg R$ باشد.

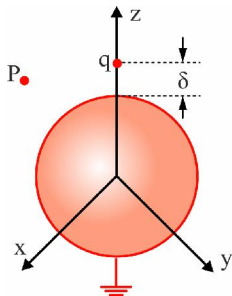
$$I = \frac{4\pi R}{h} \quad (4)$$

$$I = \frac{2\pi R^2}{h^2} \quad (3)$$

$$I = \frac{4\pi R^2}{h^2} \quad (2)$$

$$I = \frac{2\pi R}{h} \quad (1)$$

۱۱. مطابق شکل، بار نقطه‌ای q [c] در فاصله‌ی ناچیز δ بالای یک کره‌ی هادی به شعاع a زمین شده، قرار دارد. با فرض این که $a \ll \delta$ ، $a \ll 1m$ باشد. میدان الکتریکی در نقطه‌ی P با مختصات $\theta = 60^\circ$ ، $\phi = 0$ ، $r = 1m$ کدام است؟



$$\frac{q\delta}{8\varepsilon_0} [3\sqrt{3}\hat{a}_x + (2-\sqrt{3})\hat{a}_z] \quad (1)$$

$$\frac{q\delta}{8\varepsilon_0} [3\sqrt{3}\hat{a}_x - \hat{a}_z] \quad (2)$$

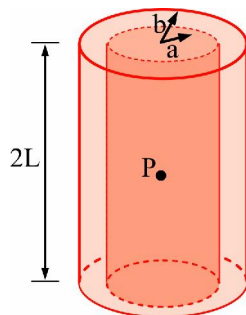
$$\frac{q\delta}{16\pi\varepsilon_0} [3\sqrt{3}\hat{a}_x + (2-\sqrt{3})\hat{a}_z] \quad (3)$$

$$\frac{q\delta}{16\pi\varepsilon_0} [(2\sqrt{3}+1)\hat{a}_x + (\sqrt{3}-b)\hat{a}_z] \quad (4)$$

۱۲. یک پوسته استوانه‌ای از ماده‌ی مغناطیسی به طول $2L$ و شعاع‌های داخلی و خارجی a و b دارای بردار

مغناطیس‌شدگی غیر یکنواخت $\vec{M} = M_0 \sin^2 \phi \hat{a}_z$ داده شده است. شدت میدان مغناطیسی \vec{H} در نقطه‌ی P

واقع در مرکز جسم کدام است؟



$$M_0 L \left(\frac{1}{\sqrt{b^2 + L^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + L^2}} \right) \hat{a}_z \quad (۱)$$

$$\frac{M_0 L}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{b^2 + L^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + L^2}} \right) \hat{a}_z \quad (۲)$$

$$\frac{M_0 L}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{b^2 + L^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + L^2}} \right) \hat{a}_z \quad (۳)$$

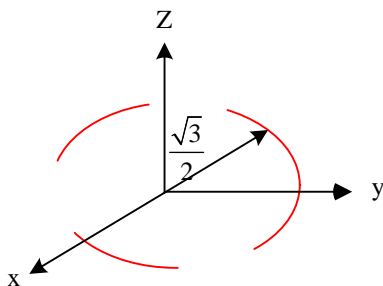
$$\frac{M_0 L}{8} \left(\frac{1}{\sqrt{b^2 + L^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + L^2}} \right) \hat{a}_z \quad (۴)$$

پاسخ تشریحی

۱. گزینه ۴ درست است.

$$\text{فرمول کره: } x^2 + y^2 + (z - 0.5)^2 = 1$$

$$\text{at } z = 0: x^2 + y^2 + 0.5^2 = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$



$$\begin{cases} \rho_s = ay^2 \left(\frac{c}{m^2} \right) \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \rightarrow \rho_s = ar^2 \sin^2 \varphi \left(\frac{c}{m^2} \right)$$

$$ds = r dr d\varphi$$

www.nashr-estekhdam.ir

$$Q = \int_{s'} \rho_s ds = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \int_0^{2\pi} ar^2 \sin^2 \varphi \times r dr d\varphi$$

$$Q = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \int_0^{2\pi} ar^3 \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right) dr d\varphi = \frac{ar^4}{4} \Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \times \frac{1}{2} \times 2\pi$$

$$Q = \frac{a\pi}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^4 \Rightarrow Q = \frac{9\pi a}{64} (c)$$

۲. گزینه ۳ درست است.

$$V = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i}$$

$$\begin{cases} R_i = z_i = \frac{1}{3^i} \text{ (m)} \\ Q_i = \frac{1}{3^i} \text{ (c)} \end{cases} \rightarrow V = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{3^i}}{4\pi\epsilon_0 \frac{1}{3^i}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^i}\right)^2$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{9}}$$

$$V = \frac{9}{32\pi\epsilon_0} \text{ (v)}$$

۳. گزینه ۱ درست است.

چون $a \gg \ell$ است، پس می‌توان حلقه دایروی را به سان یک دو قطبی مغناطیسی فرض کرد.

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1 \pi a^2}{4\pi R^3} (2 \cos \theta \vec{a}_r + \sin \theta \vec{a}_\theta)$$

$$\text{دوم حلقه در محل حلقه دوم} \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad |\vec{R}| = \ell$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1 \pi a^2}{4\pi \ell^3} (\hat{a}_\theta)$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 \pi a^2}{4\pi \ell^3} (\cos \theta \cos \varphi \hat{a}_x + \cos \theta \sin \varphi \hat{a}_y - \sin \theta \hat{a}_z)$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1 \pi a^2}{4\pi \ell^3} (0 + 0 - \hat{a}_z) = \frac{-\mu_0 I_1 \pi a^2}{4\pi \ell^3} \hat{a}_z$$

$$\vec{T} = \vec{M}_2 \times \vec{B}_1 \rightarrow \vec{T} = b^2 I_2 \hat{a}_y \times \left(\frac{-\mu_0 I_1 \pi a^2}{4\pi \ell^3} \hat{a}_z \right)$$

$$\vec{M}_2 = b^2 I_2 \hat{a}_y$$

$$\vec{T} = -\hat{a}_x \frac{\mu_0 \pi I_1 I_2 a^2 b^2}{4\ell^3}$$

۴. گزینه ۱ درست است.

طبق تقارن، \vec{J} تنها مولفه شعاعی خواهد داشت و تابع θ و φ نیست لذا:

$$\vec{J} = J_r(r) \hat{a}_r$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 J_r) = 0 \rightarrow r^2 J_r = I_0 = \text{cte}$$

$$J_r = \frac{I_0}{r^2}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \rightarrow \frac{I_0}{r^2} = \frac{\sigma_0}{r^2} E_r \rightarrow E_r = \frac{I_0}{\sigma_0}$$

www.nashr-estekhdam.ir

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = V_0 \rightarrow - \int_{r=a}^{r=b} E dr = V_0 \rightarrow - \frac{I_0}{\sigma_0} (b-a) = V_0$$

$$I_0 = \frac{-V_0 \sigma_0}{b-a} \rightarrow \vec{J} = \frac{-V_0 \sigma_0}{(b-a)r^2} \hat{a}_r$$

۵. گزینه ۲ درست است.

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Id\ell'}{R}$$

$$\vec{A}_1 : \vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Id\ell'}{R}$$

$$d\ell' = dx' \hat{a}_x$$

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = a\hat{a}_z - x\hat{a}_x$$

$$|\vec{R}| = (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{A}_1 : \frac{\mu_0}{4\pi} I \hat{a}_x \int_{-a}^a \frac{dx'}{(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} = \hat{a}_x \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\ln \left(x + (x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} \right) \right)_{-a}^a$$

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \hat{a}_x \left(\ln \frac{a + a\sqrt{2}}{-a + a\sqrt{2}} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \ln \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \hat{a}_x$$

$$\vec{A}_2 : d\ell' = a d\phi' \hat{a}_{\phi'}$$

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = a\hat{a}_z - a\hat{a}_{r'} \rightarrow |\vec{R}| = a\sqrt{2}$$

$$\vec{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^\pi \frac{I a d\phi' \hat{a}_{\phi'}}{a\sqrt{2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^\pi \frac{(-\sin \phi' \hat{a}_x + \cos \phi' \hat{a}_y)}{\sqrt{2}} d\phi'$$

$$\vec{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\sqrt{2}}{2} \times (\cos \phi' \hat{a}_x + \sin \phi' \hat{a}_y) \Big|_0^\pi = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \sqrt{2} \hat{a}_x$$

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left[\ln \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} - \sqrt{2} \right]$$

۶. گزینه ۳ درست است.

$$dQ = \rho_0 R^2 \sin \theta dR d\theta d\phi$$

$$\vec{R} = -R\vec{a}_R$$

$$\vec{E} = \int \frac{dQ\vec{R}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R}|^3} = \int \frac{(\rho_0 R^2 \sin \theta dR d\theta d\phi)(-R\vec{a}_R)}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

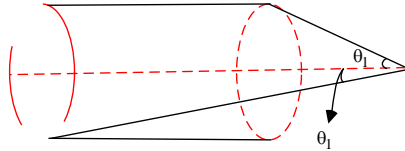
$$= \frac{-\rho_0 (2\pi)}{4\pi\epsilon_0} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a \cos \theta} dR (\sin \theta \cos \theta d\theta) \vec{a}_z = -\frac{\rho_0 a}{\epsilon_0} \left[-\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \vec{a}_z = -\frac{\rho_0 a \sqrt{2}}{12\epsilon_0} \vec{a}_z$$

۷. گزینه ۱ درست است.

$$\vec{M} = M_0 \hat{a}_z$$

$$\vec{J}_{m.v} = \vec{V} \times \vec{M} = 0$$

$$\vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \hat{a}_x = M_0 \hat{a}_z \times \hat{a}_\rho = M_0 \hat{a}_\phi$$



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$

در این مسأله $NI_0 = M_0$ و

$$\begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + R^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \theta_1 = \frac{R+L}{\sqrt{R^2 + (R+L)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow B_z = \frac{\mu_0}{2} M_0 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 M_0}{4} (\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

۸. گزینه ۴ درست است.

$$V_0 = \frac{Q_b}{4\pi\epsilon_0 b} \rightarrow Q_b = 4\pi\epsilon_0 b V_0$$

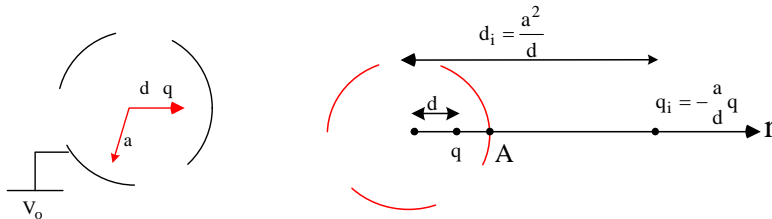
$$\rho_{sb} = \frac{Q_b}{4\pi b^2} = \frac{4\pi\epsilon_0 b V_0}{4\pi b^2} = \frac{\epsilon_0 V_0}{b}$$

چون تمام نقاط یک هادی هم پتانسیل است بنابراین سطح کره داخلی نیز V_0 است، پس مساله به صورت زیر ساده می شود.

طبق قضیه تصاویر می توان بار تصویری، میزان $-q \frac{a}{d}$ در فاصله $\frac{a^2}{d}$ قرار داد، این بار تصویر سبب صفر شدن پتانسیل کره می شود.

حال باری با چگالی سطحی یکنواخت روی کره قرار می دهیم تا پتانسیل V_0 را تأمین کند.

این بار یکنواخت هیچ میدانی درون کره تولید نمی کند.



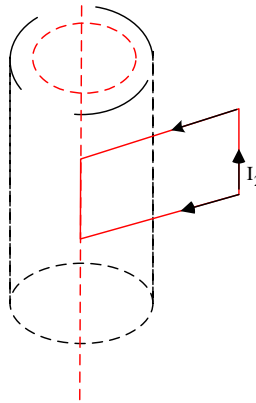
$$\vec{E}_A = \frac{q \hat{a}_r}{4\pi\epsilon_0 (a-d)^2} + \frac{\frac{a}{d} q \hat{a}_r}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{a^2}{d} - a \right)^2} \rightarrow \rho_A = E_A \epsilon_0$$

www.nashr-estekhdam.ir

$$\rho_A = \frac{-q}{4\pi} \left(\frac{1}{(a-d)^2} + \frac{\frac{a}{d}}{4\pi \left(\frac{a^2}{d} - a \right)^2} \right) = \frac{-q(a+d)}{4\pi a(a-d)^2}$$

۹. گزینه ۲ درست است.

نیروی وارد بر این دو تکه سیم قرینه یکدیگرند. پس تنها نیروی وارد به قسمت هم راستای محور Z محاسبه می گردد.



$$\bar{B}_1 = \begin{cases} \frac{\mu_0 \bar{I}_1 (r^2 - a^2)}{2\pi(b^2 - a^2)r} & a < r < b \\ \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} & r > b \\ 0 & r > a \end{cases}$$

www.nashr-estekhdam.ir

$$F = I_2 L B_1 \quad , \quad L = 2b \quad , \quad B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \quad , \quad r = 2b$$

$$F = I_2 \times 2b \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \times 2b} \rightarrow F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}$$

۱۰. گزینه ۱ درست است.

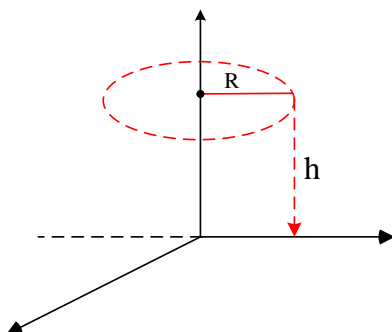
$$\bar{J} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \hat{a}_r - \frac{1}{r^2} \hat{a}_\phi$$

$$dS = \rho d\rho d\phi \hat{a}_z \quad \text{at} \quad z = h, \quad 0 < \rho < R, \quad 0 < \phi < 2\pi$$

$$I = \int_S \bar{J} \cdot d\bar{S} = \iint \left(\frac{1}{r^2 \sin \theta} \right) \left(\hat{a}_r \cdot \hat{a}_z \right) - \frac{1}{r^2} \hat{a}_\phi \int_0^{2\pi} (\hat{a}_z) \rho d\rho d\phi$$

↓
cos θ

$$I = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \rho d\rho d\phi = 2\pi \int_0^R \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \rho d\rho$$



$$\begin{cases} r \sin \theta = \rho \\ r \cos \theta = h \end{cases} \rightarrow I = 2\pi \int_0^R \frac{h}{r^2} d\rho$$

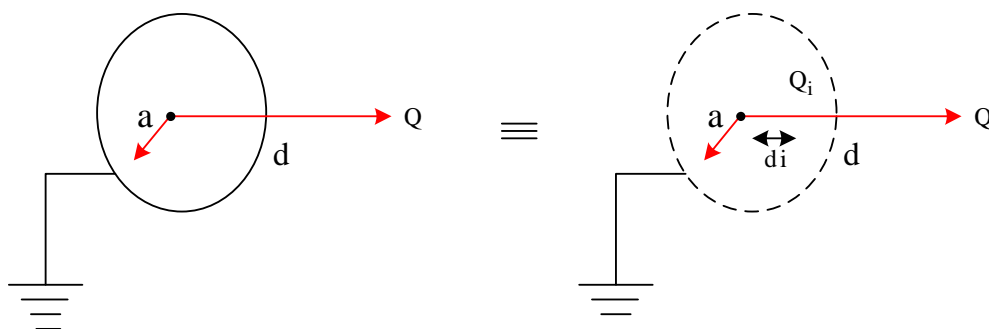
$$r^2 = \rho^2 + h^2 \rightarrow I = 2\pi \int_0^R \frac{h}{h^2 + \rho^2} d\rho = 2\pi h \int_0^R \frac{d\rho}{h^2 + \rho^2}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \rightarrow I = 2\pi h \times \frac{1}{h} \tan^{-1} \frac{\rho}{h} \Big|_0^R$$

$$I = 2\pi \tan^{-1} \frac{R}{h}$$

$$h \gg R \rightarrow \frac{R}{h} \ll 1 \rightarrow \tan^{-1} \frac{R}{h} \approx \frac{R}{h} \rightarrow I = \frac{2\pi R}{h}$$

۱۱. گزینه ۲ درست است.



$$\text{طبق قضیه تصاویر: } Q_i = -\frac{a}{d} Q, \quad d_i = \frac{a^2}{d}$$

$$\text{در این سوال: } d = a + \delta \begin{cases} d_i = \frac{a^2}{a + \delta} \xrightarrow{\delta \ll a} d_i \approx a - \delta \\ Q_i = -\frac{a}{a + \delta} Q \approx -Q \end{cases}$$

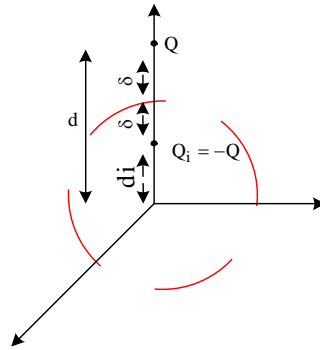
چون $a \ll 1$ است، بنابراین می‌توان بار و تصویرش را به عنوان یک دو قطبی الکتریکی در مبدأ مختصات در نظر گرفت و میدان دوقطبی عبارت است از:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 R^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}) \quad , \quad \varphi = 0 \quad , \quad \theta = 60^\circ \quad , \quad r = 1\text{m}$$

$$P = Q(2\delta)$$

www.nashr-estekhdam.ir

$$\begin{cases} \bar{a}_r = \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{a}_x + \frac{1}{2} \hat{a}_z \\ \hat{a}_\theta = \frac{1}{2} \hat{a}_x - \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{a}_z \end{cases} \rightarrow \bar{E} = \frac{2Q\delta}{4\pi\epsilon_0} \left(2 \times \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \hat{a}_x + \frac{1}{2} \hat{a}_z \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} \hat{a}_x - \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{a}_z \right) \right)$$



www.nashr-estekhdam.ir

$$\bar{E} = \frac{2Q\delta}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \hat{a}_x + \frac{1}{2} \hat{a}_z + \frac{\sqrt{3}}{4} \hat{a}_x - \frac{3}{4} \hat{a}_z \right)$$

$$\bar{E} = \frac{Q\delta}{8\pi\epsilon_0} (3\sqrt{3} \hat{a}_x - \hat{a}_z)$$

۱۲. گزینه ۳ درست است.

$$\bar{J}_{mv} = \nabla \times \bar{M} = \nabla \times (M_0 \sin^2 \varphi \hat{a}_z)$$

$$= \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{a}_r & r\hat{a}_\varphi & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & M_0 \sin^2 \varphi \end{vmatrix} = \frac{1}{r} [\hat{a}_r (2M_0 \sin \varphi \cos \varphi)]$$

$$\bar{J}_{mv} = \frac{1}{r} 2M_0 \sin \varphi \hat{a}_r \rightarrow \text{جریان شاعی هیچ میدان در راستای خود تولید نمی‌کند.}$$

$$\bar{J}_{ms} = \begin{cases} \bar{M} \times \bar{a}_r & \text{for } r = b \\ \bar{M} \times (-\bar{a}_r) & \text{for } r = a \end{cases} = \begin{cases} M_0 \sin^2 \varphi \hat{a}_z \times \hat{a}_r = M_0 \sin^2 \varphi \hat{a}_\varphi & r = b \\ M_0 \sin^2 \varphi \hat{a}_z \times (-\hat{a}_r) = -M_0 \sin^2 \varphi \hat{a}_\varphi & r = a \end{cases}$$

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_s \frac{\bar{J}_s \times \bar{R} ds'}{R^3}$$

$$\text{for } r = a: ds' = a d\varphi' dz', \quad \bar{R} = 0 - a\hat{a}_r - z'\hat{a}_z, \quad R^3 = (a^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\begin{aligned} \bar{B}_a &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{-M_0 \sin^2 \varphi' \hat{a}_\varphi \times (-a\hat{a}_r - z'\hat{a}_z)}{(a^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} a d\varphi' dz' \\ &= \frac{\mu_0 M_0}{4\pi} a \int_{-L}^L \int_0^{2\pi} \frac{-a \sin^2 \varphi' \hat{a}_z + z' \sin^2 \varphi' \hat{a}_r}{(a^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} d\varphi' dz' = \hat{a}_z \frac{\mu_0 M_0 a^2}{4\pi} \times (-\pi) \int_{-L}^L \frac{dz'}{(a^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$$\frac{2L}{a^2\sqrt{a^2+L^2}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{B}_a = \frac{-\hat{a}_z \mu_0 M_0 L}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+L^2}} \right) \\ \bar{B}_b = \frac{\hat{a}_z \mu_0 M_0 L}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{b^2+L^2}} \right) \end{array} \right. \rightarrow \bar{H} = \frac{M_0 L}{2} \hat{a}_z \left(\frac{1}{\sqrt{b^2+L^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+L^2}} \right)$$