

# جزوه انتقال حرارت

ویژه آزمون های استخدامی

# عنوان

## پیشگفتار

### فصل اول: مقدمه

- هدایت
- همرفت
- تابش

### فصل دوم: انتقال حرارت هدایتی

- قانون فوریه
- معادله دیفرانسیل هدایت دائمی یک بعدی
- معادله دیفرانسیل هدایت دو بعدی دائمی
- معادله دیفرانسیل هدایت یک بعدی با چشمه حرارتی
- معادله دیفرانسیل هدایت یک بعدی با چشمه حرارتی و تابعی از زمان
- دیواره‌های چند لایه یا کامپوزیت
- ضریب انتقال حرارت شعاعی از لوله‌ها
- ضریب انتقال حرارت عمومی
- ضخامت بحرانی عایق
- انتقال حرارت در استوانه توپر با چشمه حرارتی داخلی
- انتقال حرارت در سطوح گسترش یافته
- پره با مقطع متغیر
- تعیین ضریب انتقال حرارت عمومی برای سطوح پره‌دار

### فصل سوم: انتقال حرارت دوبعدی

- روش‌های تحلیلی (روش جداسازی متغیرها)
- روش‌های عددی
- روش اختلاف محدود

### فصل چهارم: انتقال حرارت هدایت-ناپایدار و گذرا

- معادلات حاکم
- روش انباشته یا ظرفیت فشرده
- سیستم انباشته چندگانه
- هدایت گذرا در جسم نیمه بی‌نهایت
- هدایت گذرای یک بعدی در صفحه، استوانه و کره در معرض جابجایی

- صفحه بی‌نهایت
- استوانه بی‌نهایت
- کره
- هدایت گذرا در اجسام چند بعدی
- میله‌ای به طول بی‌نهایت
- مکعب به ابعاد ...
- استوانه به طول محدود و معین
- حل عددی معادله انتقال حرارت ناپایدار
- روش صریح
- روش ضمنی

### فصل پنجم: انتقال حرارت جابجایی (جریان خارجی)

- مقایسه با مکانیک جامدات
- روش‌های تحلیلی
- مقایسه تغییرات لایه مرزی سرعت و ضریب انتقال حرارت در طول صفحه
- معادلات لایه مرزی و تشابه رینولدز-کولبورن
- جریان از روی هندسه‌های مختلف
- رابطه تجربی هلیپرت

### فصل ششم: انتقال حرارت جابجایی در لوله‌ها (جریان داخلی)

- دمای متوسط حجمی
- شرایط مرزی در جریان آرام توسعه یافته
- روابط تجربی و محاسباتی برای تعیین ضریب انتقال حرارت
- جریان لایه‌ای کاملاً توسعه یافته
- جریان لایه‌ای در حال توسعه در لوله‌های صاف دما ثابت
- جریان لایه‌ای در حال توسعه در لوله‌های شار حرارتی ثابت
- جریان مغشوش توسعه یافته در لوله‌های صاف

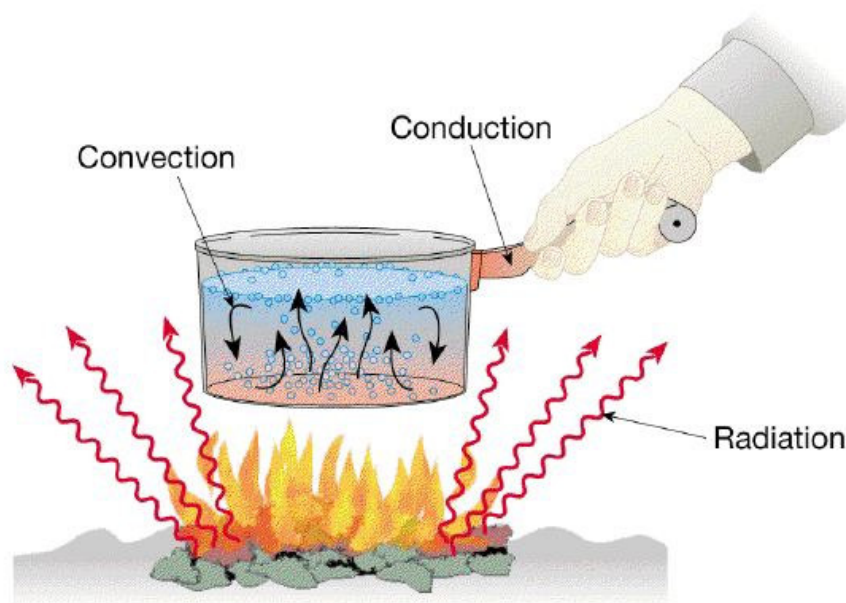
### فصل هفتم: انتقال حرارت تابشی

- ضریب دید
- روابط بین ضریب دید
- انتقال حرارتی تابشی در اجسام سیاه

### مراجع

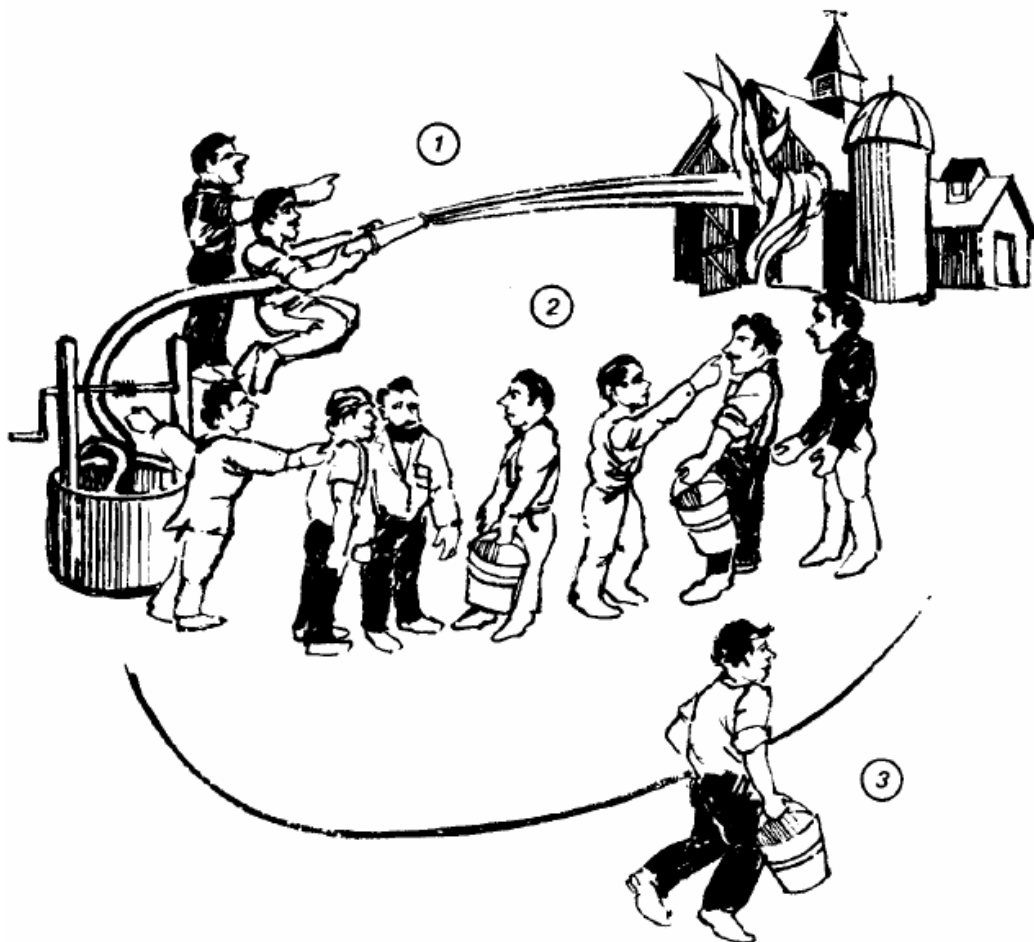
## فصل اول: مقدمه

انواع مکانیزمهای انتقال حرارت Modes or Methods of Heat Transfer  
از نظر فیزیک کلاسیک انتقال حرارت توسط سه مکانیزم یا روش: ۱- هدایتی ۲- جابجایی (همرفت) ۳- تابشی انجام می‌شود (شکل ۱ را ببینید).  
در شکل ۲ آنالوژی انتقال حرارت با انتقال آب از محل چاه به محل آتش‌سوزی به نمایش گذاشته شده‌است. همانگونه که مشاهده می‌گردد افراد برای انتقال آب از سه روش مختلف بهره گرفته‌اند: در حالت اول (که با شماره ۱) مشخص شده‌است آب بدون هیچ گونه وابستگی به محیط از منبع به محل مورد نظر منتقل می‌شود. این روش مشابه انتقال حرارت تشعشعی می‌باشد.  
در حالت دوم (شماره ۲) دسته افراد با کمک هم آب را از طریق محیط از منبع به محل آتش‌سوزی منتقل می‌کنند. این روش مشابه انتقال حرارت هدایتی می‌باشد.  
در حالت سوم (شماره ۳) دونده آب را از منبع به محل آتش‌سوزی منتقل می‌نماید. این روش همانند انتقال حرارت جابجایی می‌باشد.



شکل ۱. روش‌های مختلف انتقال حرارت





شکل ۲. شبیه سازی انتقال حرارت با انتقال آب [۱۰]

#### - هدایت (Conduction)

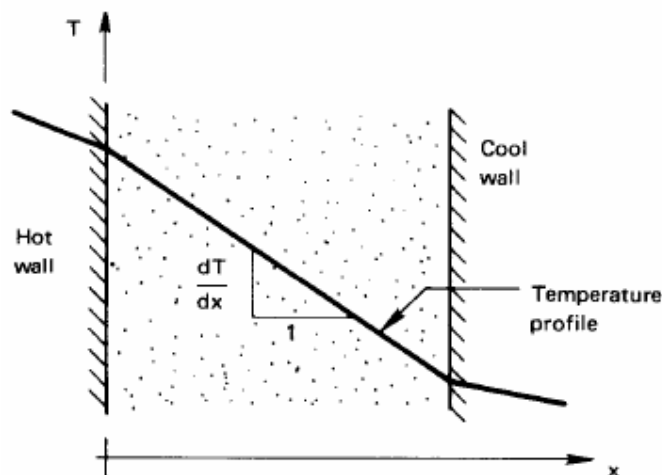
هدایت به انتقال گرما در جامدات و یا محیط‌های سیال ساکن در اثر اختلاف دما در این محیط‌ها انجام می‌گیرد. بطور کلی فرض بر این است که در اثر جابجایی ماکروسکوپیک محیط، گرما از یک نقطه به نقطه‌ای دیگر منتقل نمی‌شود بلکه انتقال گرما توسط عواملی مانند حرکت تصادفی مولکول‌های گازی و یا ارتعاش شبکه کریستالی جامد انجام شود. در کتب کلاسیک انتقال حرارت مبحث انتقال حرارت به حالت‌های یک بعدی، دو بعدی، چند بعدی و دائمی و غیر دائمی تقسیم بندی شده‌است که در بخش‌های آتی بیشتر در این مورد بحث خواهیم کرد.

معادله حاکم بر انتقال حرارت هدایتی در حالت یک بعدی بصورت زیر نوشته می‌شود (قانون فوریه):

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (۱)$$

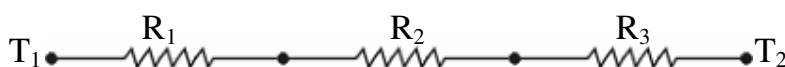
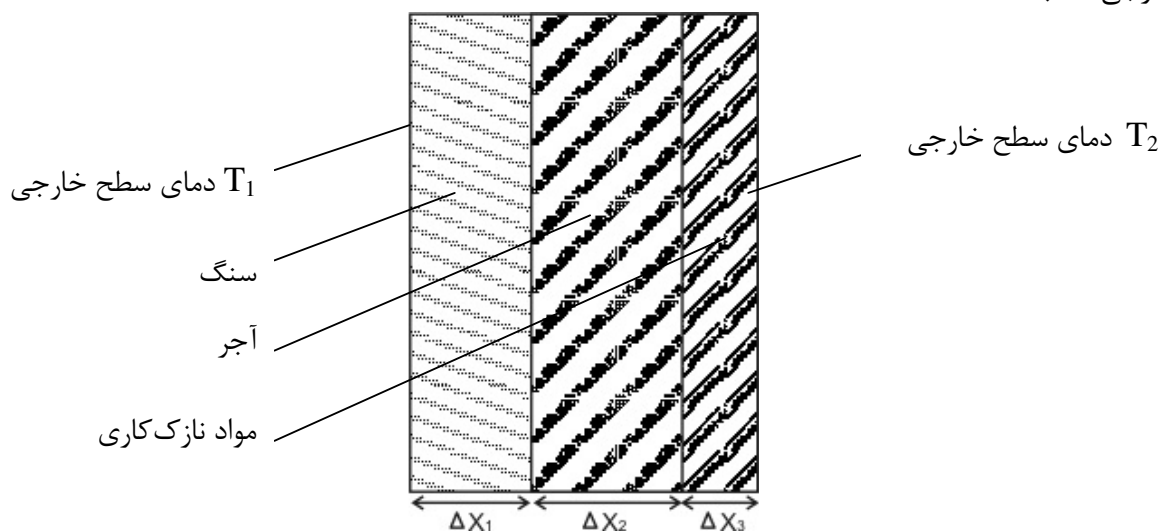
در رابطه فوق،  $q$  شار حرارتی [ $W/m^2$ ]،  $T$  درجه حرارت [K]،  $\frac{\partial T}{\partial x}$  گرادیان دما [K/m] و  $k$  ضریب انتقال حرارت هدایتی [ $W/mK$ ] می‌باشد. مقدار  $k$  بستگی به محیطی دارد که در آن انتقال حرارت هدایتی انجام می‌گیرد، در محیط‌های فلزی مقدار  $k$  بزرگتر از محیط‌های غیر فلزی

می‌باشد. که با فرضیه انتقال حرارت توسط الکترون‌های آزاد سازگار است. همچنین گازها مانند هوا دارای ضریب هدایت پایین‌تری نسبت به جامدات می‌باشند. علامت منفی در رابطه (۱) بدین معنی است که در جهت افزایش مختصات  $x$  مقدار دما کاهش می‌یابد، به عبارت دیگر گرادیان دما  $\frac{\partial T}{\partial x}$  کوچکتر از صفر است ولی  $q$  مثبت محاسبه می‌گردد.



شکل ۵. انتقال حرارت از دیواره

انتقال حرارت در دیوارهای خارجی ساختمان‌ها از جمله مثال‌های معمول و کلاسیک در کاربرد هدایت می‌باشد. مثلاً فرض کنید در شرایط دائمی دمای جدار خارجی دیوار  $T_1$  و دمای جداره خارجی  $T_2$  باشد.



شکل ۶. انتقال حرارت از دیواره چند لایه

قانون فوریه را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial x} \Rightarrow q = \frac{\Delta T}{R_t} \quad (2)$$

ملاحظه می‌شود که می‌توان جریان انتقال حرارت فوق را با جریان الکتریسیته شبیه‌سازی نمود به این ترتیب که  $q$  با مقدار جریان الکتریسیته،  $\frac{\Delta x}{k}$  با مقاومت الکتریکی و  $\Delta T$  را با اختلاف پتانسیل الکتریکی شبیه‌سازی نمود. به این ترتیب یک مدار سری مطابق شکل می‌توان تشکیل داد، برای مدار تشکیل شده خواهیم داشت:

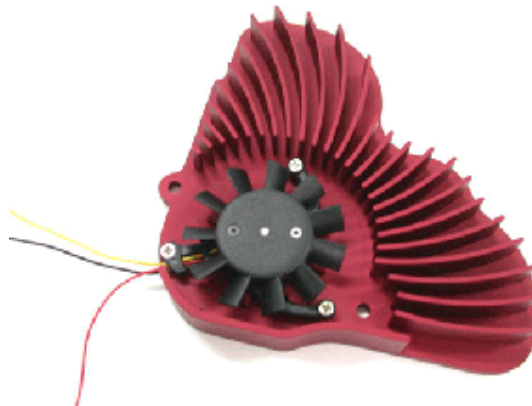
$$q = \frac{\Delta T}{\sum R} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{x_1}{k_1 A} + \frac{x_2}{k_2 A} + \frac{\Delta x_3}{k_3 A}} \quad (3)$$

در رابطه فوق،  $A$  سطح تبادل حرارت و عمود بر جهت انتقال حرارت می‌باشد.

### - همرفت (Convection)

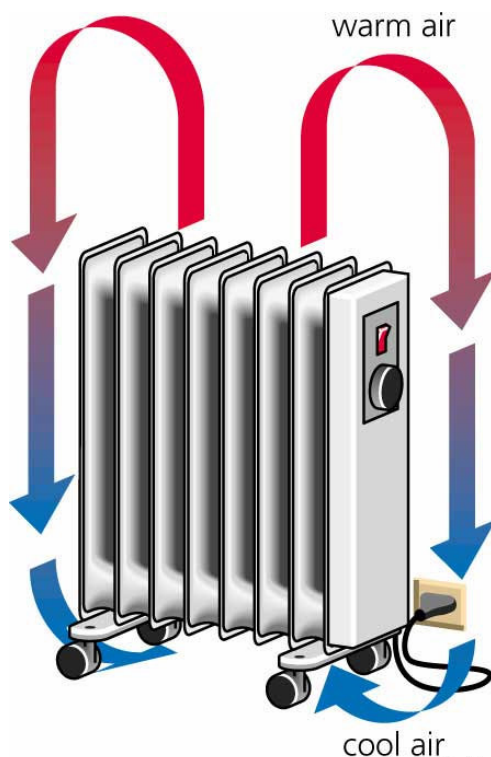
جابجایی یا همرفت زمانی وجود دارد که سیال (گاز یا مایع) در جوار یک سطح جامد حرکت نماید و بین سیال و جدار جامد اختلاف دما وجود داشته‌باشد. انتقال حرارت جابجایی خود بر دو نوع اصلی اجباری و آزاد تقسیم می‌شود.

جابجایی اجباری (Forced Convection): هنگامی که جسم در مقابل جریان هوا (با دمای بیشتر یا کمتر از خود جسم) قرار می‌گیرد. در اثر جریان هوا و اختلاف دمای بین سیال و جسم، انتقال حرارت بین جسم و سیال صورت می‌گیرد. به این نوع انتقال حرارت، انتقال حرارت جابجایی اجباری گفته می‌شود. در شکل ۳ نمونه‌ای از انتقال حرارت اجباری نشان داده شده است که پره‌های هیت‌سینک Heat Sink یک وسیله الکترونیکی در اثر جریان هوای ایجاد شده توسط فن (پنکه) پره‌های در معرض جریان هوا خنک‌کاری می‌شوند.



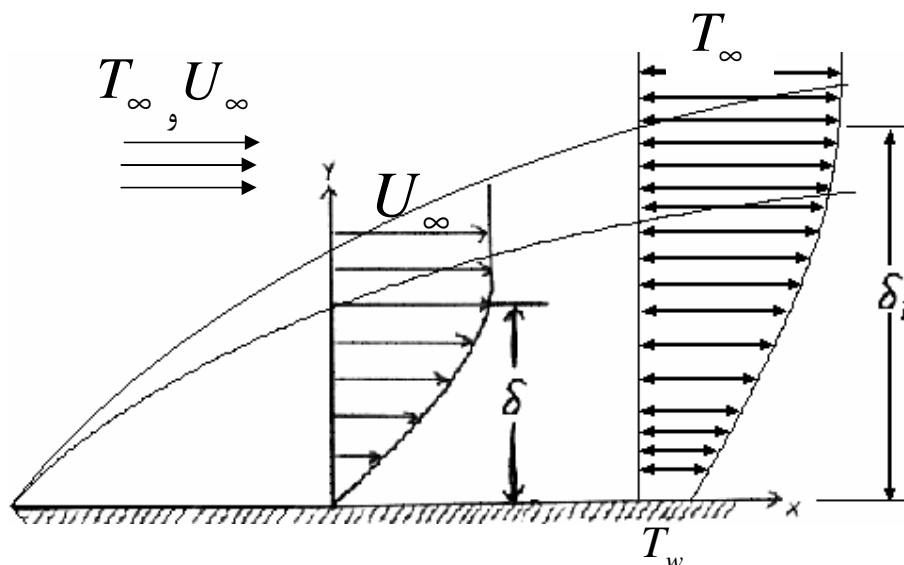
شکل ۳. خنک کردن لوازم الکترونیکی با استفاده از فن (مثالی از جابجایی اجباری)

جابجایی آزاد یا طبیعی (Natural or Free Convection): هنگامی که سیال اطراف جسم در اثر اختلاف دمای خود با سیال محیط اطراف شناور شده (در اجسام سرد به پایین و در اجسام گرم به سمت بالا) می‌رود انتقال حرارت همرفت آزاد یا طبیعی صورت می‌گیرد. در شکل ۴ نمونه‌ای از انتقال حرارت طبیعی نشان داده شده‌است که گرمایش هوای منزل با استفاده از بخاری برقی را نشان می‌دهد.



شکل ۴. گرمایش هوا بوسیله نوعی بخاری برقی (مثالی از جابجایی آزاد)

به عنوان مثالی از مسائل کلاسیک جابجایی می‌توان به انتقال جابجایی از روی دیواره تخت در برابر جریان یکنواخت هوا اشاره کرد



شکل ۷. انتقال حرارت جابجایی

\* شروع کننده انتقال حرارت در این روش، هدایت یا Conduction است، زیرا سیال لزج چسبیده به دیواره ساکن فرض می‌شود و انتقال حرارت از جداره جامد در سیال ساکن خیلی نزدیک به دیواره بصورت هدایت منتقل می‌شود.  
بنابراین برای لایه ساکن نزدیک به دیواره می‌توان نوشت:

$$q = -k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (۴)$$

ضریب هدایت حرارتی سیال

در انتقال حرارت جابجایی قانون سرمایش نیوتن بصورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$q = hA(T_{wall} - T_\infty) \quad (۵)$$

$$q = hA(T_w - T_\infty)$$

$\rightarrow$  [m<sup>2</sup>] سطح تبادل حرارت  
 $\rightarrow$  [W/m<sup>2</sup>K] ضریب انتقال حرارت جابجایی

پیدا کردن  $h$  (ضریب انتقال حرارت جابجایی) مشکل است و یکی از اهداف اصلی مبحث انتقال حرارت جابجایی بدست آوردن این ضریب می‌باشد. بررسی فیزیکی پدیده انتقال حرارت جابجایی به کمک فرضیه لایه مرزی انجام می‌گیرد که در فصل پنجم با آن آشنا خواهید شد.

### - تابش (Radiation)

همه اجسام با استفاده از امواج الکترومغناطیسی در دمای بیشتر از صفر کلوین از خود انرژی ساطع می‌کنند. به این نوع انتقال انرژی انتقال حرارت تابش جابجایی گفته می‌شود. اهمیت انتقال حرارت تابشی به دمای سطح جسم و نوع سطح جسم بستگی دارد. در این جزوه مقدمه ای بر تابش ارائه شده است. برای دو جسم سیاه که فقط باهم تبادل حرارتی دارند می‌توان نوشت:

$$q_{rad} = \sigma A(T_1^4 - T_2^4) = h_r A(T_1 - T_2) \quad (6)$$

رابطه فوق، قانون استفان - بولتزمن نام دارد در این رابطه  $\sigma$  ثابت استفان بولتزمن می‌باشد و مقدار آن برابر  $5.6677 \times 10^{-8} \text{W/m}^2 \text{K}^4$  می‌باشد،  $h_r$  برای شبیه کردن محاسبات با فرمول‌های انتقال حرارت جابجایی و هدایت تعریف می‌شود تا محاسبات از نظر ریاضی خطی باشد. در فصل تابش جسم سیاه و روابط مورد نیاز برای محاسبه انتقال حرارت اجسام غیر سیاه در حالت کلی ارائه شده است.

## فصل دوم: انتقال حرارت هدایتی

### Conduction Heat Transfer

هدف اصلی فصل حاضر آشنا کردن دانشجویان با روش‌های بدست آوردن معادلات حاکم بر انتقال حرارت و حل این معادلات در شرایط بسیار ساده یک بعدی می‌باشد.

معادلات حاکم بر انتقال حرارت از طریق هدایت در مختصات کارتزین بصورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

معادله (۱) در حالت خطی حل تحلیلی دارد (با استفاده از روش جداسازی متغیرها) که در فصل سوم مورد بحث قرار خواهد گرفت. البته برای حل این معادلات روشهای تحلیلی دیگری نیز موجود می‌باشد که در دوره‌های تحصیلات تکمیلی مورد بحث قرار می‌گیرند از جمله این روش‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

Duhamel	- دو هامل
Green's Function	- تابع گرین
Laplace Transform	- تبدیل لاپلاس
Integral Transform	- تبدیل انتگرال

در مختصات قطبی معادله (۱) به شکل زیر نوشته می‌شود:

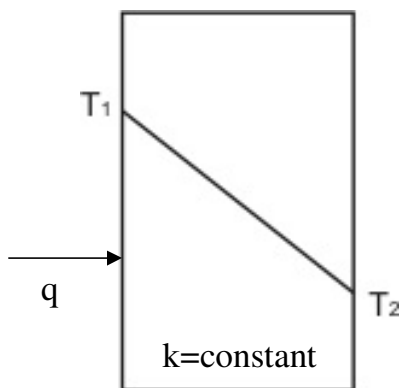
$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{\rho c}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2)$$

#### قانون فوریه Fourier's Law

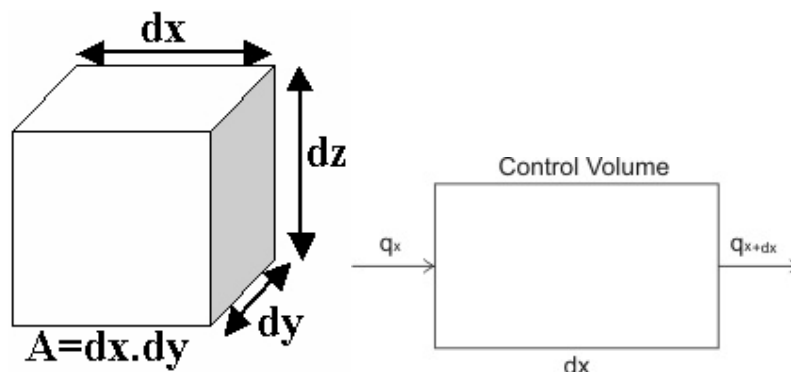
مطابق این قانون شار حرارتی هدایت در یک محیط تناسب مستقیم با گرادیان دما و سطح تبادل

حرارتی (گرادیان دما در دو سوی سطح تبادل حرارت  $\frac{\partial T}{\partial x}$ ) دارد:

$$q \propto \frac{\Delta T}{\Delta x} A$$
$$\Rightarrow q = kA \frac{\partial T}{\partial x} \quad k \left[ \frac{W}{mK} \right] \quad (3)$$



**شکل ۱.** انتقال حرارت در یک محیط یک بعدی با ضریب انتقال حرارت ثابت  
با استفاده از اصل موازنه انرژی معادله (۱) را در حالت‌های ساده بدست می‌آوریم.  
- معادله دیفرانسیل هدایت دائمی یک بعدی



$$q_x = q_{x+dx} \Rightarrow q_x = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad (۴)$$

با فرض ثابت بودن سطح مقطع  $A = dx \cdot dy$

$$(۴) \text{ و } (۳) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left( -kA \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0 \Rightarrow k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (۵)$$

با فرض ثابت بودن  $k$  با انتگرالگیری از رابطه (۵):

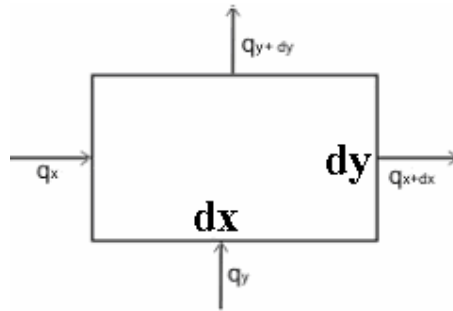
$$\frac{\partial T}{\partial x} = C_1 \quad (۶)$$

$$T = C_1 x + C_2 \quad (۷)$$

ملاحظه می‌شود که اگر ضریب هدایت حرارتی ثابت باشد توزیع دمای یک بعدی در جسم خطی خواهد بود.

- معادله دیفرانسیل هدایت دو بعدی دائمی





$$q_x + q_y = q_{x+dx} + q_{y+dy}$$

$$q_x + q_y = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy$$

$$\Rightarrow \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy = 0 \quad (8)$$

با استفاده از (۳):

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} A_x, \quad q_y = -k A_y \frac{\partial T}{\partial y} \quad (9)$$

خواهیم داشت:

$$A_x = dy \times 1, \quad dx \times 1 = A_y \quad (10)$$

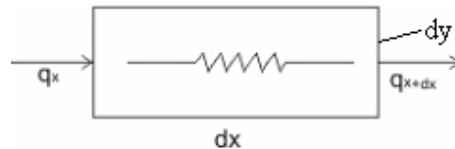
با جانشین کردن (۳)، (۸) و (۱۰) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy + \frac{\partial}{\partial y} \left( -k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy dx = 0 \quad (11)$$

با فرض ثابت بودن ضریب هدایت حرارتی:

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (12)$$

- معادله دیفرانسیل هدایت یک بعدی با چشمه حرارتی



$$q_x + (\dot{q}) dx dy \times 1 = q_{x+dx}$$

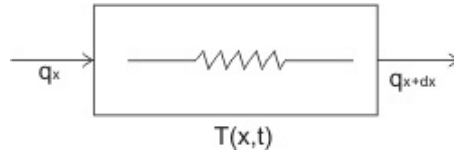
$$q_x + \dot{q} dx dy = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx$$

$$\dot{q} dx dy = \frac{\partial}{\partial x} \left( -k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy \quad (13)$$

با فرض ثابت بودن ضریب انتقال حرارت هدایت خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (14)$$

- معادله دیفرانسیل هدایت یک بعدی با چشمه حرارتی و تابعی از زمان



$$q_x + \dot{q}dx dy = q_x + \rho c dx dy \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{و} \quad \rho dx dy (1) = \text{حجم المان} \quad (15)$$

$$q_x + \dot{q}dx dy = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \rho c dx dy \frac{\partial T}{\partial t} \quad (16)$$

$$\dot{q}dx dy = \frac{\partial}{\partial x} \left( -k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dy dx + \rho c dx dy \frac{\partial T}{\partial t} \quad (17)$$

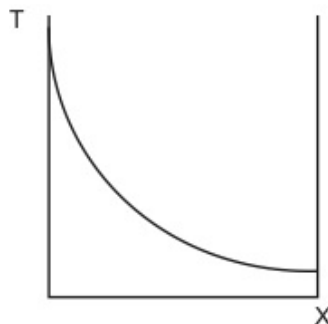
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{\rho c}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (18)$$

$\rho$  جرم مخصوص و  $C$  گرمای ویژه جسم است.

با تعریف  $\alpha = \frac{k}{\rho c}$  ضریب پخش حرارتی Thermal Diffusion می‌توان نوشت:

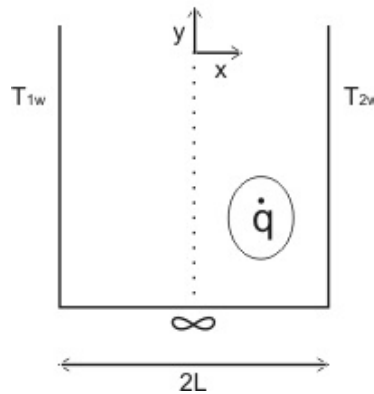
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (19)$$

مثال - معلوم کنید دیوار زیر در حال گرم شدن است یا سرد شدن:



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} > 0$$

پس در حال گرم شدن است.  
\* توزیع دما را در دیواره نشان داده شده در شکل زیر را بیابید



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dots = 0 \Rightarrow \text{Steady State } \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{-\dot{q}}{k} \text{ و } k \neq k(x)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{-\dot{q}x}{k} + C_1 \quad (*)$$

$$T = \frac{-\dot{q}}{2k}x^2 + C_1x + C_2$$

تقارن از  $\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$$x = -L \Rightarrow T = T_w \Rightarrow T_w = \frac{-\dot{q}}{2k}L^2 + C_2 \Rightarrow C_2 = T_w + \frac{\dot{q}}{2k}L^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{-\dot{q}}{2k}x^2 + x^2 + \frac{qL^2}{2k} + T_w$$

$$\Rightarrow T = \frac{-\dot{q}}{2k}[x^2 - L^2] + T_w$$

- می خواهیم انتقال حرارت از این دیواره ها را بیابیم:  
۱. بدون محاسبه و از روش استدلالی می توان گفت چون شرایط پایا است کل حرارت تولید شده باید بطور کامل خارج شود بنابراین:

$$\dot{Q}_{out} = \dot{q} \times \underbrace{2L \times W \times 1}_{\text{حجم}}$$

گرما در واحد حجم

۲. از راه معادله (\*) به ازای واحد پهنا می توان نوشت:

$$\frac{-\dot{q}}{k}(+L) = \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{برای لبۀ راست}$$

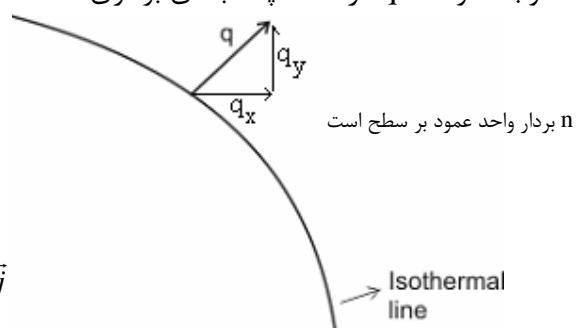
$$\frac{-\dot{q}}{k}(-L) = \frac{\dot{q}}{k}L = \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{برای لبۀ چپ}$$

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=-L} = \left[ - \frac{\dot{q}}{k} L \right] = \dot{q}L \quad \text{از لبه سمت چپ}$$

$$q = -R \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = -h \left[ \frac{-\dot{q}}{R} L \right] = +\dot{q}L \quad \text{از لبۀ راست}$$

$$Q_{out} = q_{چپ} + q_{راست} = +2\dot{q}L$$

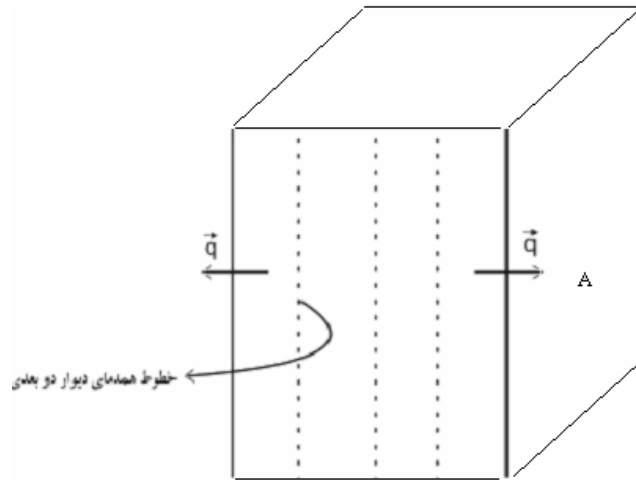
\* توجه شود که  $q$  در حالت چند بعدی برداری است که به صورت زیر تعریف می شود.



$$\vec{q} = -k \vec{\nabla} T = -k \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} - k \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j}$$

$$\vec{q} = -k \frac{\partial T}{\partial n}$$

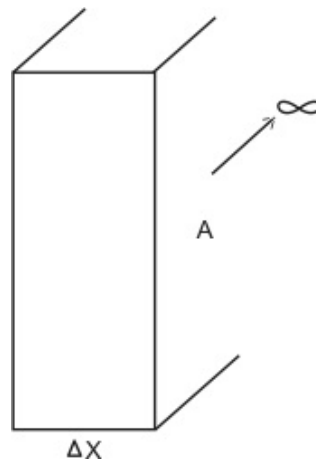
خطوط همدمما برای دیوار دوبعدی در هدایت یک بعدی:



شکل خطوط همدمای بر روی دیواره تخت (خطوط موازی لبه‌ها خطوط همدمای می‌باشند)

درواقع دما را می‌توان به پتانسیل تشبیه کرد و خطوط پتانسیل همان خطوط هم دما در اینجا می‌باشند و خطوط شار حرارتی بر خطوط همدمای عمود هستند.

هدایت یک بعدی یعنی هدایت یا گرادیان دما منحصرأً در یکی از جهات مختصات وجود داشته باشد.



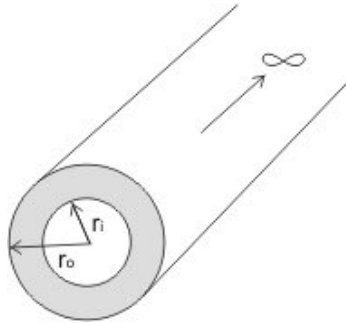
$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \neq 0$$

(۲۱)

لوله ای به طول نامحدود:

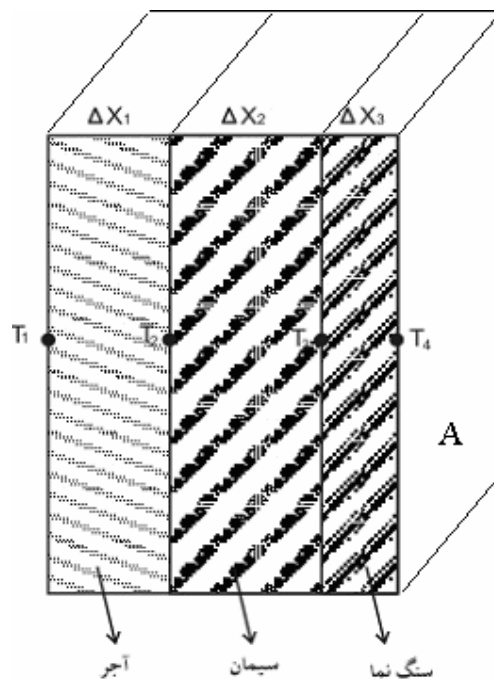


$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \theta} &= 0 & \frac{\partial T}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial r} &\neq 0 & q &\neq f(\theta) \end{aligned} \quad (22)$$

خطوط همدمای دایره ای هم مرکز لوله هستند.

### دیوارهای چند لایه یا کامپوزیت Composite Walls

در عمل دیواره های موجود معمولاً از چند لایه با جنس های مختلف تشکیل شده اند (شکل را ببینید). در این بخش به محاسبات مربوط به انتقال حرارت از این دیواره ها می پردازیم.



شکل انتقال حرارت از دیواره چند لایه

$$q = kA \frac{T_1 - T_2}{\Delta x_1} \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} q &= kA \frac{T_2 - T_3}{\Delta x_2} \\ q &= k A \frac{T_3 - T_4}{5x_3} \end{aligned} \right\} T_i - T_{i+1} = \frac{q_i \Delta x_i}{k_i A} \quad (24)$$

در شرایط دائمی و Steady  $q = q_1 = q_2 = q_3 \Leftarrow$

$$\Rightarrow q = \frac{T_1 - T_4}{\frac{x_1}{k_1 A} + \frac{x_2}{k_2 A} + \frac{\Delta x_3}{k_3 A}} \quad (25)$$

### - انتقال حرارت شعاعی از لوله‌ها

لوله‌ای به طول  $l$  و شعاع داخلی و خارجی  $r_i$ ,  $r_o$  در نظر بگیرید با نوشتن قانون فوریه معادلات انتقال حرارت در مختصات استوانه‌ای خواهیم داشت:

$$q = -kA \frac{\partial T}{\partial r} \quad (26)$$

$$q = -k2\pi l \frac{\partial T}{\partial r} \Rightarrow -dT = \frac{q}{2\pi k} \frac{dr}{r} \quad (27)$$

$$T_i - T_o = \frac{q}{2\pi k} \ln \frac{r_o}{r_i}$$

$$\Rightarrow q = \frac{T_i - T_o}{\left( \ln \frac{r_o}{r_i} \right) / 2\pi k} \quad (28)$$

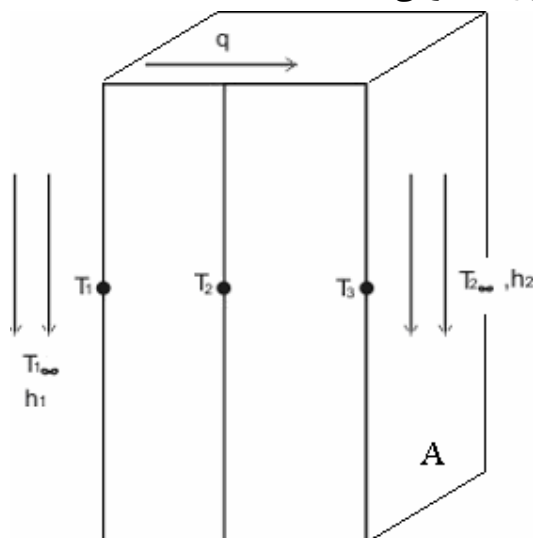
$$q = \frac{\Delta T}{R} \quad (29)$$

$$R = \frac{\ln \frac{r_o}{r_i}}{2\pi k} \quad (30)$$

به همین ترتیب می‌توان برای لوله‌های کامپوزیتی نوشت:

$$q = \frac{\Delta T}{\frac{\ln r_2 / r_1}{2\pi k_1} + \frac{\ln r_3 / r_2}{2\pi k_2} + \dots} \quad (31)$$

## - ضریب انتقال حرارت عمومی Overall Heat Transfer Coefficient



شکل انتقال حرارت از یک دیواره تخت

در شرایط انتقال حرارت دائمی:

$$\begin{cases} q_1 = h_1 A (T_{1\infty} - T_1) \\ q_2 = k_1 A \frac{(T_1 - T_2)}{\Delta x_1} \\ q_3 = k_2 A \frac{(T_2 - T_3)}{\Delta x_3} \\ q_4 = h_2 A (T_3 - T_{2\infty}) \end{cases} \quad (32)$$

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 \quad (33)$$

از (32) و (33) نتیجه می شود که:

$$q = \frac{(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}{\frac{\Delta x_1}{k_1 A} + \frac{\Delta x_2}{k_2 A} + \frac{1}{h_1 A} + \frac{1}{h_2 A}} \quad (34)$$

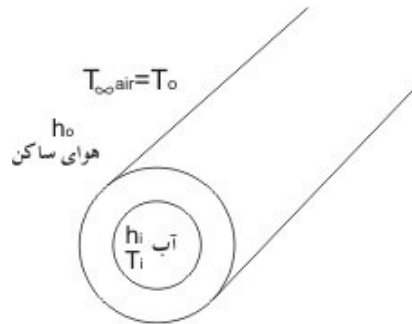
$$q = UA\Delta t \Rightarrow U = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{\Delta x_1}{k_1} + \frac{\Delta x_2}{k_2} + \frac{1}{h_2}} \left[ \frac{W}{m^2 \cdot K} \right] \quad (35)$$

در عبارت فوق U ضریب انتقال حرارت عمومی می باشد.

## - ضریب انتقال حرارت عمومی برای سیستم شعاعی

در این بخش به محاسبه ضریب انتقال حرارت کلی برای مقاطع دایروی می پردازیم. لوله ای که در داخل آن سیال جریان دارد و محیط بیرون آن نیز توسط سیال دیگری احاطه شده در نظر می گیریم.





شکل انتقال حرارت یک لوله استوانه‌ای

$h_o$  ضریب انتقال حرارت هوای ساکن محیط اطراف استوانه و  $h_i$  ضریب انتقال حرارت جابجایی سیال درون لوله می‌باشد.

$$q = \frac{T_i - T_o}{\frac{1}{h_i A_i} + \frac{\ln(\frac{r_2}{r_1})}{2\pi k} + \frac{1}{h_o A_o}} \quad (36)$$

$$A_i = 2\pi r_1$$

$$A_o = 2\pi r_2$$

با تعریف

$$q = U_o A_o \Delta T \quad (37)$$

ضریب انتقال حرارت عمومی بر حسب سطح خارجی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$U_o = \frac{1}{\frac{A_o}{h_i A_i} + \frac{A_o \ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi k} + \frac{1}{h_o}} \quad (38)$$

با تعریف

$$q = U_i A_i \Delta T \quad (39)$$

ضریب انتقال حرارت عمومی سطح داخلی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$U_i = \frac{1}{h_i + \frac{A_i \ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi k} + \frac{A_i}{h_o A_o}} \quad (40)$$

**سؤال** آیا در جدار تماس دو لایه با فرض شرایط ایده‌آل گرادیان دما ثابت است؟

$$q_1 = -k_1 A \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$q_2 = -k_2 A \frac{\partial T}{\partial x} \quad (41)$$

$$q_1 = q_2 \rightarrow \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_1 \neq \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_2 \quad (**)$$

\*توجه شود که پیوستگی در نقطه های تماس وجود دارد ولی مشتق پذیری وجود ندارد به دلیل رابطه (\*\*) که در بالا آمده است.

### - ضخامت بحرانی عایق Critical Thickness of Insulation

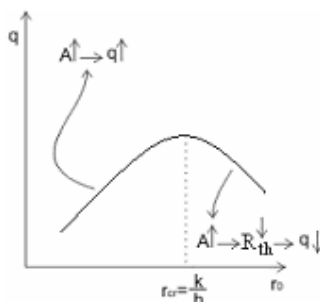
دمای جداره داخلی  $T_i$  و این لوله در معرض محیط با دمای  $T_\infty$  و ضریب انتقال حرارت جابجائی آن  $h$  می باشد. از مقاومت حرارتی جدار لوله فلزی در مقابل ضخامت عایق  $(r_o - r_i)$  صرف نظر می کنیم.

$$q = \frac{T_i - T_\infty}{\ln \frac{r_o}{r_i} + \frac{1}{2\pi k l} + \frac{1}{h(2\pi r_o)l}} \quad (42)$$

$$\frac{dq}{dr_o} = \frac{(T_i - T_\infty) \left( \frac{1}{r_o k} - \frac{1}{hr_o^2} \right)}{(\text{مخرج})^2} \quad (43)$$

$$\Rightarrow r_8 = \frac{k}{h} \quad \frac{\partial^2 q}{\partial r_o^2} < 0 \Rightarrow \text{بنابراین نقطه مشتق صفر معرف انتقال حرارت ماکزیمم است} \quad (44)$$

$$A \uparrow \Rightarrow q \uparrow \quad (45)$$



شکل انتقال حرارت بر حسب شعاع بحرانی

### - انتقال حرارت در استوانه توپر با چشمه حرارتی داخلی

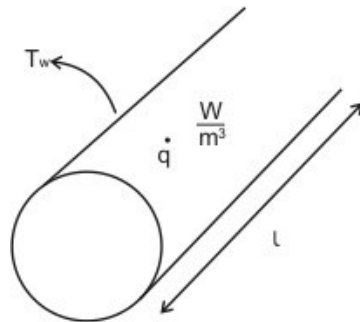
مطابق شکل یک استوانه توپر با چشمه حرارتی داخلی  $\dot{q}$  در نظر بگیرید

$$T = T(r) \quad (46)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (47)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -\frac{\dot{q}}{k} \Rightarrow r \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{-qr^2}{2k} + C_1 \quad (48)$$

$$\Rightarrow T = \frac{-\dot{q}r^2}{4k} + C_1 \ln r + C_2 \quad (49)$$



شکل استوانه توپر با چشمه حرارتی داخلی

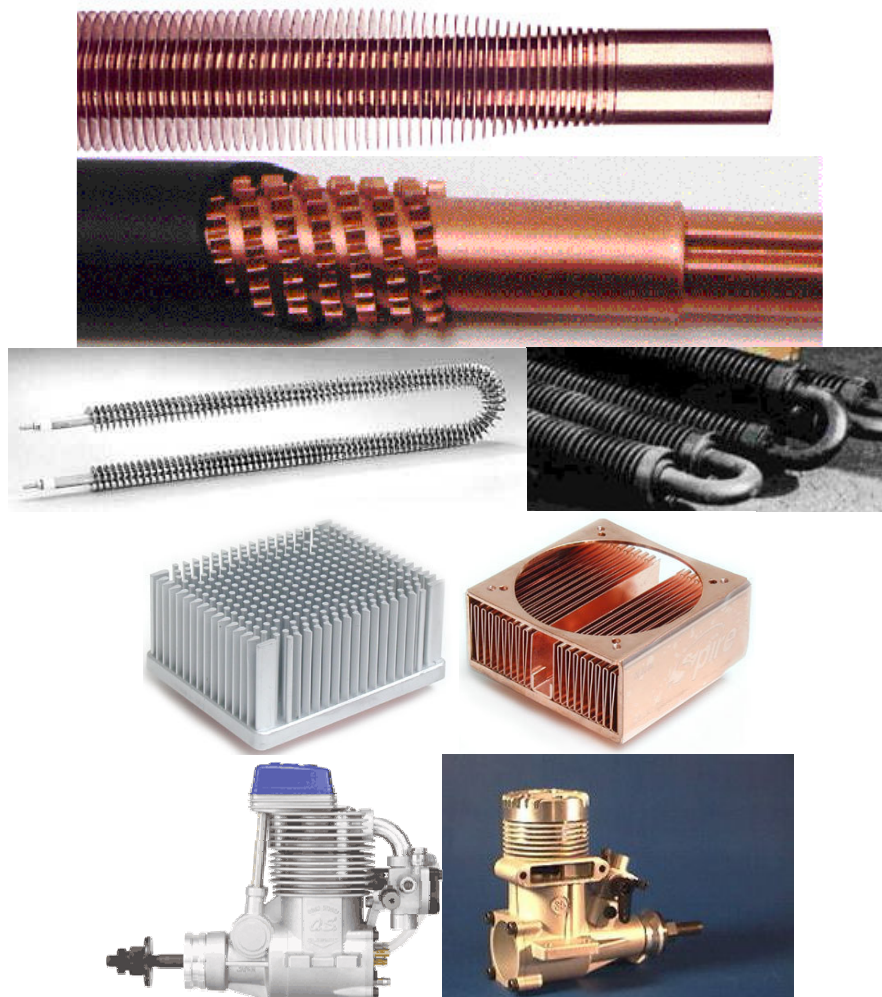
$$\begin{cases} T(r=R) = T_w \\ \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0 \Rightarrow T - T_w = \frac{\dot{q}}{4k} (R^2 - r^2) \end{cases} \quad (50)$$

**سؤال:** آیا  $h$  و  $k$  قابل محاسبه اند؟

$k$ : جزء خواص ماده می باشد و با روش های آزمایشگاهی محدود می توان آن را بدست آورد. البته  $k$  با دما تغییر می کند و لازم است که جداول خواص برحسب دما را داشته باشیم. همچنین  $k$  در اجسام جامد تابعی از مکان و شبکه کریستالی نیز می باشد.  
 $h$ : بستگی به رژیم جریان، هندسه جریان، جنس سیال دارد و همچنین تشابه بین الگوی ضریب اصطکاک و ضریب انتقال حرارت جابجائی وجود دارد.

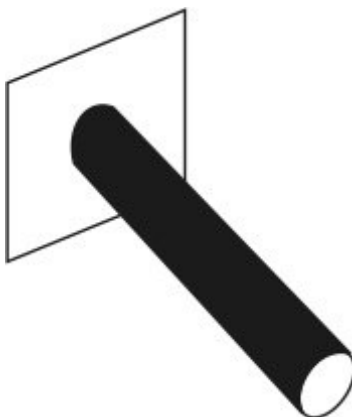
### انتقال حرارت در سطوح گسترش یافته Extended Surfaces

منظور از سطوح گسترش یافته بررسی انتقال حرارت از پره ها Fin می باشد. پره ها برای افزایش انتقال حرارت از یک سطح، در صنایع مختلف از جمله در مبدل های حرارتی در خنک کاری لوازم الکترونیکی و بسیاری کاربردهای دیگر مورد استفاده قرار می گیرند. در شکل تعدادی از کاربردهای پره ها در صنایع مختلف نشان داده شده است. در این بخش با استفاده از ساده سازی های خاصی به بررسی انتقال حرارت از این پره ها نشان داده شده است.



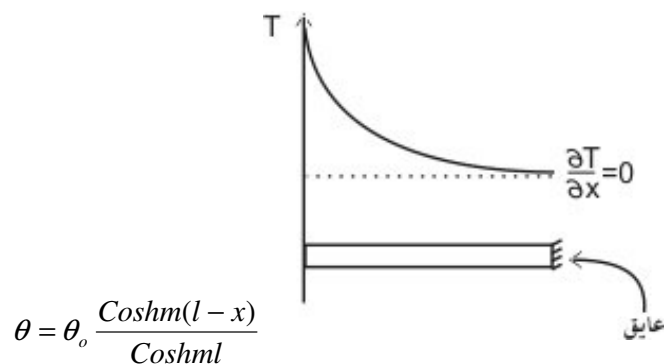
شکل کاربردهای متنوع پره‌ها

پره با طول بی نهایت با دمای ریشه  $T_o$  که در دمای محیط  $T_\infty$  قرار دارد و با در نظر گرفتن  
 $\theta_o = T_o - T_\infty$  و  $\theta = T - T_\infty$

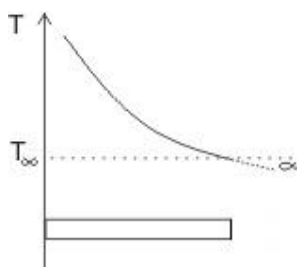


$$\theta = \theta_o e^{-mx}$$

پره انتها عایق:



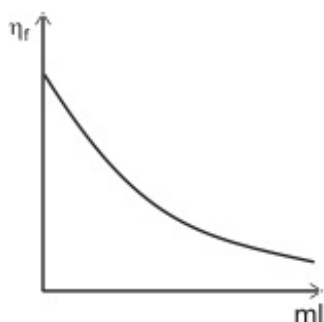
پره با طول معین:



$$\eta_f = \frac{q \text{ واقعی با پره}}{\text{وقتی همه پره در دمای ریشه باشد}} \quad \text{راندمان پره: در حالت کلی} \quad (51)$$

$$\eta_f = \frac{\sqrt{hpkA}\theta_o \tanh ml}{ph\theta_o l} = \frac{\tanh ml}{ml} \quad (52)$$

در رابطه فوق  $h$  ضریب انتقال حرارت جابجایی،  $k$  ضریب هدایت حرارتی پره،  $A$  سطح مقطع پره و  $p$  پیرامون مقطع پره می‌باشد.



$$\epsilon_f = \frac{\sqrt{hpkA}\theta_o}{hA\theta_o} = \sqrt{\frac{pk}{hA}} \quad \text{کارایی پره:} \quad (53)$$

برای پره با طول بی نهایت

پره زمانی کارائی مناسب دارد که ضریب هدایت حرارتی بالا و آن را در معرض محیط با  $h$  کم قرار دهیم. اکنون به تفسیر فیزیکی رابطه (۵۳) می پردازیم.

$$q = hA\theta_o = \frac{\theta_o}{\frac{1}{hA}} \Rightarrow R_1 \quad (54)$$

- مقاومت در حالت بدون پره  $\frac{1}{hA}$  است.

$$q = \sqrt{hpkA}\theta_o = \frac{\theta_o}{\frac{1}{\sqrt{hpkA}}} \Rightarrow R_2 \quad (55)$$

مقاومت در حالت با پره  $R_2$  است.

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{hA}{\sqrt{hpkA}} : \frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{pk}{hA}} \quad (56)$$

$$\Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \varepsilon_f \quad \text{پره کارائی}$$

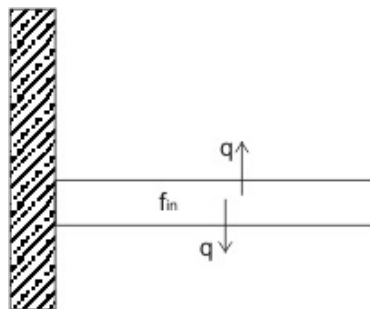
در واقع می توان گفت که کارائی پره عبارتست از مقاومت حرارتی بدون پره به مقاومت حرارتی با پره حرارتی می باشد.

قانون سرمایش نیوتن را یکبار دیگر یادآوری می کنیم:

$$q = hA(T - T_\infty) \quad (57)$$

برای زیاد کردن انتقال حرارت باید  $h$  یا  $A$  را تغییر دهیم.

برای تغییر و یا گسترش  $A$  از فین ها (پره ها) استفاده می کنیم.



در حالت ایده آل برای پره استوانه ای با انتهای عایق خواهیم داشت:

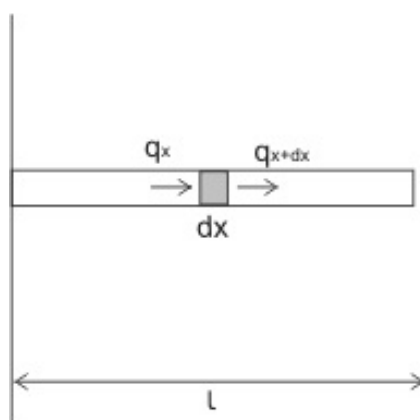
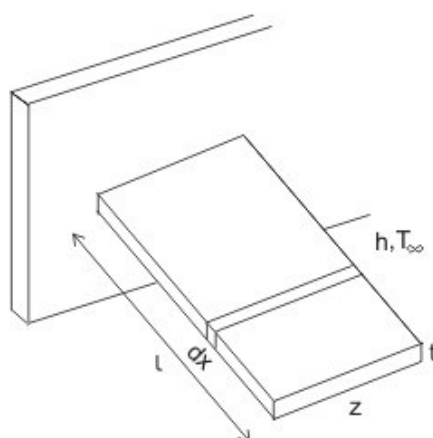
$$q = h A (T - T_\infty) \quad (58)$$

$\downarrow$   
 $\pi d l$   
 دمای ریشه  
 سطح جانبی

در فرمول فوق  $d$  قطر و  $l$  طول پره می باشد.

توجه:

فین را طرف سیال با  $h$  کمتر تعبیه می کنند چرا؟



روابط ریاضی برای پره های با مقطع یکنواخت

فرضیات:

- گرادیان دما فقط در جهت  $x$  داریم (ضخامت  $t$  نازک است)

-  $h$  ثابت و یکنواخت است.

موازنه انرژی

$$q_x = q_{x+dx} + q_{conv}$$

$$-kzt \frac{\partial T}{\partial x} = -kzt \left( \frac{dT}{dx} + \frac{d^2 T}{dx^2} dx \right) + h(2zdx + 2tdx)(T - T_\infty)$$

$$-kA \frac{\partial T}{\partial x} = -kA \frac{\partial T}{\partial x} - kA \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx + hpdx(T - T_\infty)$$

$$kA \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - hp(T - T_\infty) = 0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{hp}{KA} (T - T_\infty)$$

$$m = \sqrt{\frac{hp}{KA}} \left( \frac{1}{m} \right)^{1/2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - m^2 \theta = 0 \\ T - T_\infty = \theta \end{array} \right.$$

شرایط مرزی اول:

$$x = 0$$

$$T = T_o \Rightarrow \theta = T_o - T_\infty = \theta_o$$

شرایط مرزی دوم:

الف) پره طول بلند باشد.

$$\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow \infty \\ T = T_\infty \Rightarrow \theta = 0 \end{array} \right. \quad \text{جواب} \quad \frac{\theta}{\theta_o} = e^{-mx}$$

$$q = \sqrt{hpkA} \theta_o$$

ب) پره انتها عایق:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = l \\ \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{\theta}{\theta_o} = \frac{\cosh m(l-x)}{\cosh ml}$$

$$q = \sqrt{hpkA} \theta_o \tanh(ml)$$

ج) پره با طول معین:

$$x = L$$

$$-kA \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = hA(T_{(L)} - T_\infty)$$

$$\Rightarrow k \frac{d}{dx} \Big|_{x=L} = -h \theta \Big|_{x=L}$$

پره با مقاطع متغیر:



از تعریف راندمان پره به ترتیب زیر استفاده می کنیم.

$$\eta_f = \frac{tgh(ml)}{mL}$$

$$mL = \sqrt{\frac{hp}{kA}} L = \sqrt{\frac{h(2z+2t)}{kzt}} L$$

$$z \gg t, mL = \sqrt{\frac{2hz}{ktz}} L = \sqrt{\frac{2h}{kt}} L = \sqrt{\frac{2h}{ktL}} L^{\frac{3}{2}}$$

$$A_p = Lt \Rightarrow \text{profile Area}$$

$$\eta_f = \frac{tgh\left[\frac{2h}{kA_p} L^{\frac{3}{2}}\right]}{\sqrt{\frac{2h}{kA_p} L^{\frac{3}{2}}}}$$

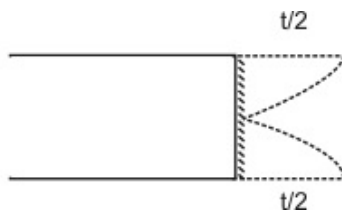
برای شرایطی که  $\left(\frac{ht}{2k}\right)^{\frac{1}{2}} \ll \frac{1}{2}$  باشد، آنگاه می توان برای محاسبه راندمان فین هائی که انتها

عایق نیستند در رابطه فوق به طول فین به اندازه  $\frac{t}{2}$  اضافه کرد و طول تصحیح شده نامید.

طول تصحیح شده از رابطه

$$L_c = L + \frac{t}{2}$$

محاسبه می گردد، خطای چنین تقریبی حدود 5% است.



بنابراین راندمان برای فین های مستطیلی که در انتها نیز تبادل حرارت دارند بطور تقریبی بصورت

زیر بیان می شود.

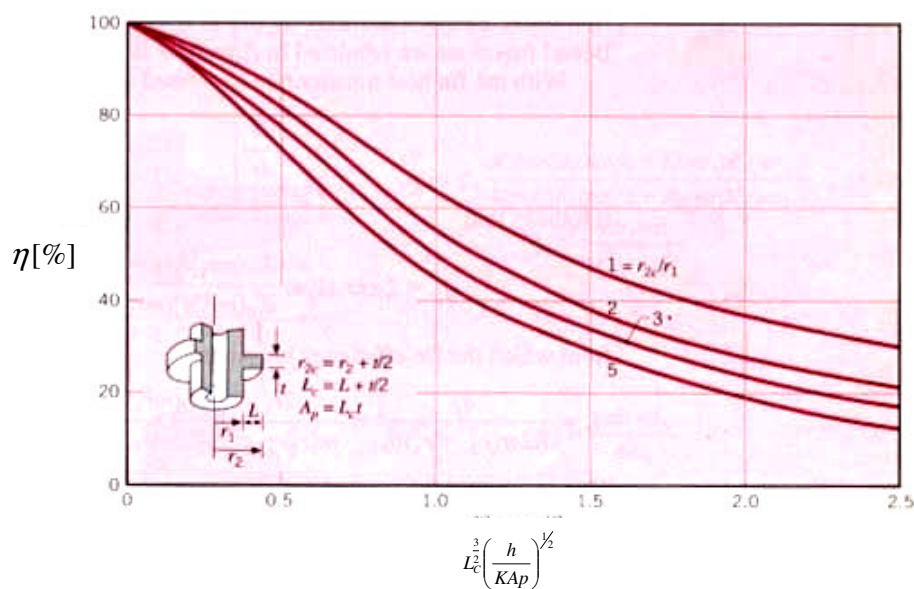
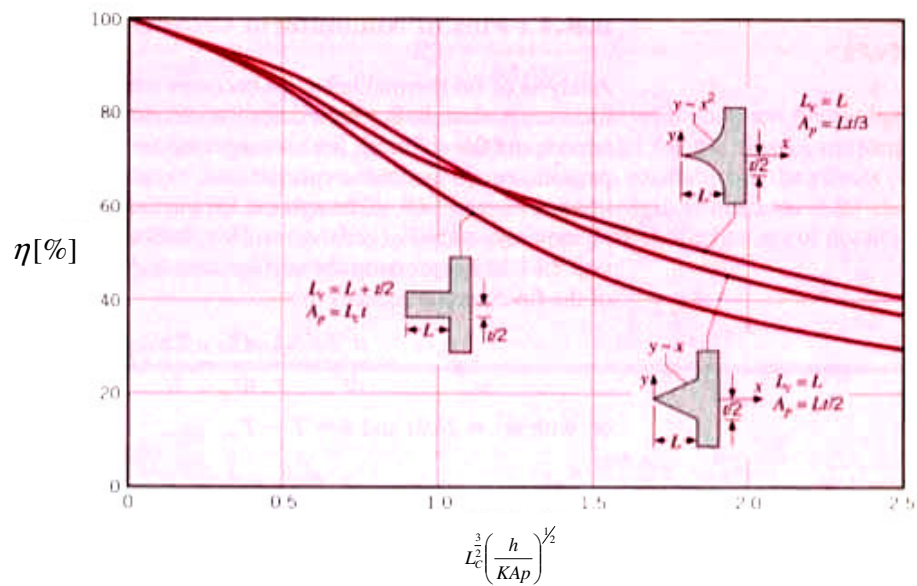
بطور کلی:

$$\eta_f = \frac{tgh\sqrt{\frac{2h}{kA_p}\left(L + \frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{\frac{2h}{kA_p}\left(L + \frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}}$$

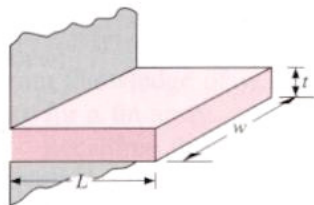
$$A_p = \left(L + \frac{t}{2}\right)t = L_c t$$

در شکل راندمان دوفین با مقاطع پروفیل مثلثی و مستطیلی نشان داده شده است. مورد فین مثلثی توسط حل معادله دیفرانسیل هدایت و سپس با استفاده از تعریف بازده فین بدست آمده است.

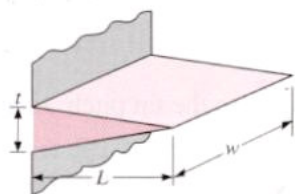
توجه کنید چون سطح تبادل حرارت در انتهای فین مثلی صفر است بنابراین این این فینها عملاً انتها عایق هستند.



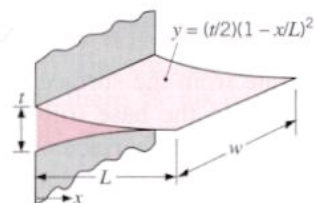
شکل نمودار بازدهی پره‌های محیطی لوله‌ها [۹]



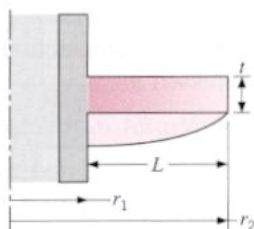
$$\eta_f = \frac{\tanh mL_c}{mL_c}$$



$$\eta_f = \frac{1}{mL} \frac{I_1(2mL)}{I_0(2mL)}$$

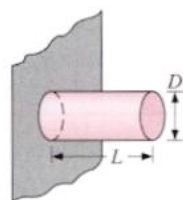


$$\eta_f = \frac{2}{[4(mL)^2 + 1]^{1/2} + 1}$$

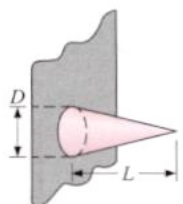


$$\eta_f = C_2 \frac{K_1(mr_1)I_1(mr_{2c}) - I_1(mr_1)K_1(mr_{2c})}{I_0(mr_1)K_1(mr_{2c}) + K_0(mr_1)I_1(mr_{2c})}$$

$$C_2 = \frac{(2r_1/m)}{(r_{2c}^2 - r_1^2)}$$



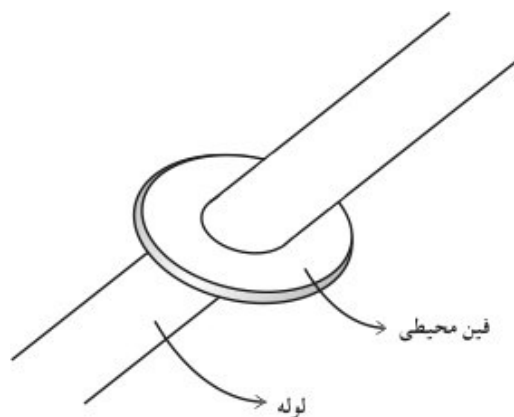
$$\eta_f = \frac{\tanh mL_c}{mL_c}$$



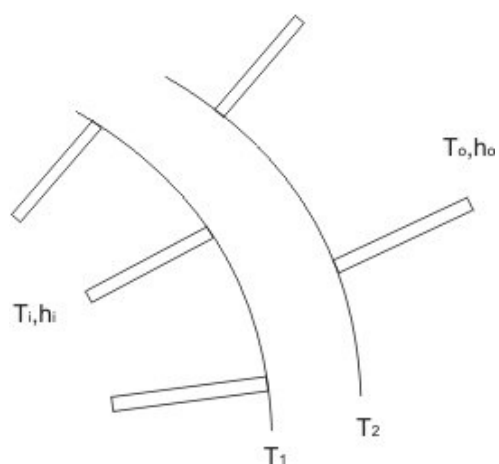
$$\eta_f = \frac{2}{mL} \frac{I_2(2mL)}{I_1(2mL)}$$

شکل راندمان پره‌ها با اشکال مختلف [۹]

در شکل راندمان فین های محیطی نیز برحسب پارامتر  $L_c^{\frac{3}{2}} \left( \frac{h}{KA\rho} \right)^{\frac{1}{2}}$  رسم شده است.



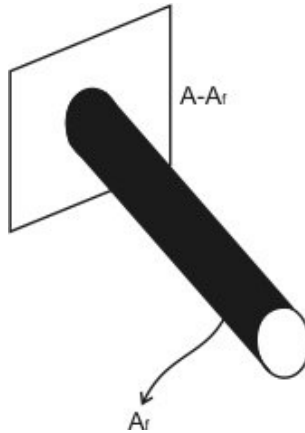
- تعیین ضریب انتقال حرارت عمومی برای سطوح پره دار



$$Q = UA(T_i - T_o)$$

ابتدا بازده کل سطح پره دار را تعریف می کنیم:

$$\eta_f = \frac{\text{حرارت واقعی از سطح پره و سطح بی پره}}{\text{حرارتی که از سطح پره و از سطح بدون پره در دمای ریشه منتقل میشود}}$$



$$\eta_t = \frac{(A - A_f)h\Delta T + \eta_f A_f h\Delta T}{Ah\Delta T}$$

$$\eta_t = 1 - \frac{A_f}{A}(1 - \eta_f)$$

$$Q_1 = \eta_{ti} h_i A_i (T_i - T_1) = \frac{T_i - T_1}{\frac{1}{\eta_{ti} h_i A_i}}$$

$$Q_2 = \frac{T_1 - T_2}{\text{هدایت}}$$

$$Q_3 = \frac{T_2 - T}{\frac{1}{h_o A_o \eta_{to}}}$$

در حالت دائم:

$$Q = \frac{T_i - T_o}{\frac{1}{\eta_{ti} h_i A_i} + R + \frac{1}{\eta_{to} A_o h_o}}$$

پس

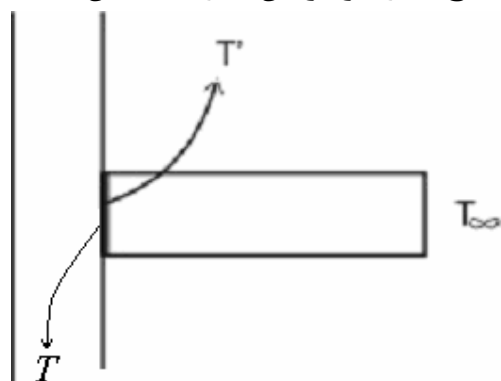
$$UA = \frac{1}{\frac{1}{\eta_{ti} h_i A_i} + R + \frac{1}{\eta_{to} A_o h_o}}$$

$$Q = U_i A_i \Delta T = UA \Delta T$$

$$\Rightarrow U_i = \frac{UA}{A_i}$$

$$\Rightarrow U_i = \frac{1}{\frac{1}{\eta_{ti} A_i} + R + \frac{A_i}{\eta_{to} A_o h_o}}$$

- تعیین بازده کلی سطح با در نظر گرفتن مقاومت تماس



$$\eta_t = \frac{(A - A_f)h\Delta T + \eta_f A_f h \Delta T'}{Ah\Delta T}$$

$$(T' - T_\infty)A_f h \eta_f = \frac{T - T'}{R_c / A_c}$$

در رابطه فوق  $R_c$  مقاومت تماس و  $A_c$  سطح ریشه یا سطح مقطع پره می باشد.

$$\frac{T - T_\infty}{\frac{1}{A_f h \eta_f} + \frac{R_c}{A_c}} = \frac{T' - T_\infty}{\frac{1}{A_f h \eta_f}}$$

$$T' - T_\infty = \frac{(T - T_\infty) \frac{1}{A_f h \eta_f}}{\frac{1}{A_f h \eta_f} + \frac{R_c}{A_c}}$$

$$\eta_t = \frac{(A - A_f)h\Delta T + \frac{\eta_f A_f h \Delta T}{\frac{1}{A_f h \eta_f} + \frac{R_c}{A_c}}}{h A \Delta T}$$

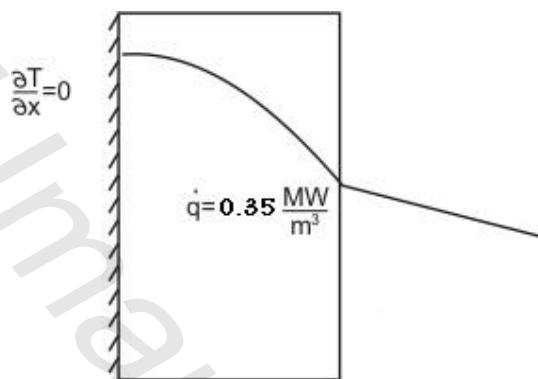
$$\eta_t = \frac{Ah\Delta T - A_f h \Delta T + \Delta T \left( \frac{1}{\frac{1}{A_f \eta_f h} + \frac{R_c}{A_c}} \right)}{h A \Delta T}$$

$$\eta_t = 1 - \frac{A_f}{A} \left[ 1 - \frac{\eta_f}{1 + \eta_f \frac{R_c h A_f}{A_c}} \right] = 1 - \frac{A_f}{A} \left[ 1 - \frac{\eta_f}{1 + \underbrace{\eta_f h A_f \frac{R_c}{A_c}}_{C_1}} \right]$$

$$\Rightarrow \eta_t = 1 - \frac{A_f}{A} \left[ 1 - \frac{\eta_f}{C_1} \right]$$

## مسائل

۱. یک طرف دیواری به ضخامت 7.5cm عایق است و از طرف دیگر تحت تاثیر یک محیط به دمای  $93^{\circ}\text{C}$  و ضریب انتقال حرارت جابجائی  $570 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}}$  است هرگاه در داخل دیوار تولید حرارت به میزان  $0.35 \frac{\text{MW}}{\text{m}^3}$  داشته باشیم مطلوبست دمای حداکثر دیوار  $k=21$ .



$$T_{\infty} = 93^{\circ}\text{C}$$

$$h = 570 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0$$

شرایط مرزی

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \\ -K \frac{\partial T_A}{\partial x} \Big|_{x=7.5\text{cm}} = hA(T - T_{\infty}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = -\frac{\dot{q}}{2k} x^2 + C_1 x + C_2$$

$$\Rightarrow T = -\frac{\dot{q}}{2k} x^2 + 186^{\circ}\text{C} \Rightarrow T_o = 186^{\circ}\text{C}$$

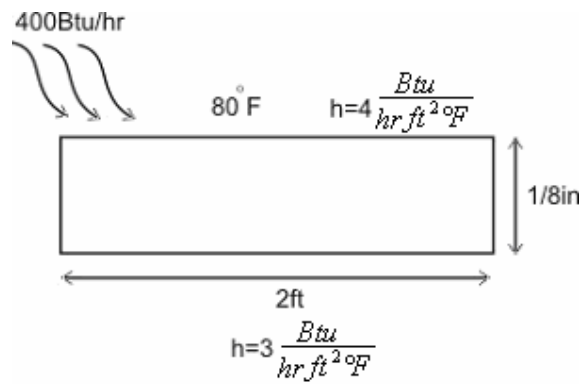
شرایط مرزی اعمال

۲. یک صفحه مسی با ضخامت  $\frac{1}{8}$ " و طول 2ft و عرضی 1ft در معرض هوای  $80^{\circ}\text{F}$  قرار دارد.

اگر کل انرژی تابشی خورشید که به صفحه برخورد می کند  $400 \frac{\text{Btu}}{\text{hr}}$  باشد و ضریب انتقال

حرارت جابجائی از بالا و پائین به ترتیب 3,4  $\frac{\text{Btu}}{\text{hr ft}^2 \cdot ^{\circ}\text{F}}$  باشد، مطلوبست دمای تعادل

صفحه.



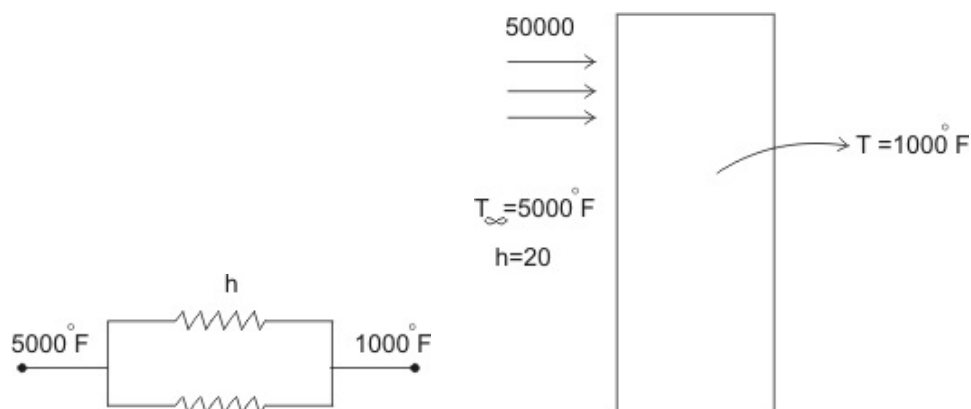
خواسته: دمای تعادل صفحه

$$\begin{aligned}
 q_{\text{rad}} + q_1 + q_2 &= 0 \\
 \Rightarrow \dot{q}_{\text{rad}} &= h_1 A(T - 80) + h_2 A(T - 80) \\
 400 &= 4(2 \times 1) \times (T - 80) + 3(2 \times 1)(T - 80) \\
 \Rightarrow T_{\infty} &= 108.5
 \end{aligned}$$

۳. جدار داخلی اتاق احتراق یک موتور  $50000 \frac{\text{Btu}}{\text{hr ft}^2}$  انرژی تابشی از گازها در دمای  $5000^\circ\text{F}$

دریافت می کند و ضریب انتقال حرارت جابجایی این گاز و دیوار  $20 \frac{\text{Btu}}{\text{hr ft}^2 \text{°F}}$  می باشد.

اگر دمای دیوار داخلی  $1000^\circ\text{F}$  باشد مطلوبست مقاومت معادل این فرایند انتقال حرارت.





$$\begin{aligned} \overbrace{50000A}^{q_{rad}} + hA(5000 - 1000) &= q \\ 50000 &= h_r(5000 - 1000) \\ (h_r A + h_c A)(5000 - 1000) &= q \\ \Rightarrow R &= \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} = \frac{1}{\frac{h_r h_c}{1 + \frac{1}{h_r} + \frac{1}{h_c}}} = \frac{1}{h_r + h_c} \\ Q &= (h_c + h_r)(5000 - 1000) \end{aligned}$$

به معنای موازی بودن است

۴. دو صفحه بزرگ فولادی در دمای  $200^\circ\text{F}$  و  $160^\circ\text{F}$  از یکدیگر بوسیله میله ای فولادی به قطر  $1''$  و طول  $1\text{ ft}$  جدا شده اند. میله به هر دو صفحه جوش شده است فضای بین صفحات توسط عایق پر شده است. فضای بین صفحات توسط عایق پر شده است عایق سطح جانبی میله را نیز پوشانده است به علت اختلاف ولتاژ بین دو صفحه، جریان الکتریکی در میله ایجاد شده و جریان الکتریکی  $40 \frac{\text{Btu}}{\text{hr}}$  حرارت تلف می کند. دمای حداکثر میله و همچنین شار حرارتی در دو انتهای میله را محاسبه کنید.

۵. جهت تعیین هدایت حرارتی یک میله بلند به قطر  $1''$  نیمی از آنرا در داخل کوره ای و نیمه دیگر را در معرض هوای  $80^\circ\text{F}$  قرار می دهند. پس از ایجاد شرایط دائمی در دو نقطه به فاصله  $3''$  دما به ترتیب  $258^\circ\text{F}$  و  $196^\circ\text{F}$  می شود. اگر ضریب انتقال حرارت جابجائی  $4 \frac{\text{Btu}}{\text{hft}^{20}\text{F}}$  باشد، مطلوبست محاسبه ضریب هدایت حرارتی میله پره با طول خیلی بد.

۶. دو انتهای یک میله مسی II شکل به قطر  $1''$  به دیوار قائمی متصل است. دمای دیوار  $200^\circ\text{F}$  بوده و طول گسترده میله II شکل  $2\text{ft}$  است. دمای هوای محیط  $100^\circ\text{F}$  است اگر ضریب انتقال حرارت جابجائی  $6 \frac{\text{Btu}}{\text{hft}^{20}\text{F}}$  باشد مطلوبست تعیین دمای نقطه میانی (وسط) میله و انتقال حرارت از این میله.

۷. یک صفحه به سطح به ضخامت  $L$  دو محیط در دمای  $T_o, T_i$  را از هم جدا می کند. ضریب انتقال حرارت در جابجائی برای این دو محیط  $h_o, h_i$  می باشد. فرض کنید  $T_i$  بزرگتر از  $T_o$  باشد. می خواهیم این صفحه با محیطی که در دمای  $T_i$  است حرارتی مبادله نکند. بدین منظور بطریق الکتریکی  $\dot{q}$  انرژی بطور یکنواخت در صفحه تولید می کنیم مطلوبست  $\dot{q}$ .

۸. در لحظه ای از زمان توزیع دما در جسمی به صورت تابع زیر می باشد:

$$T(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + z^2 - xy + 2yz$$

اگر خواص حرارتی جسم ثابت فرض شود و چشمه حرارتی نیز وجود نداشته باشد تعیین کنید در کدام نواحی دما بازمان تغییر خواهد کرد.

## فصل سوم: انتقال حرارت دوبعدی

### 2-D Conduction Heat Transfer

این فصل به بررسی روش‌های موجود برای حل مسائل انتقال حرارت دو بعدی اختصاص یافته‌است. برای این منظور ابتدا روش جداسازی متغیرها (از روش‌های تحلیلی متداول) ارائه شده‌است پس از آن به روش‌های عددی موجود برای حل مسائل انتقال حرارت هدایتی پرداخته شده‌است. لازم به یادآوری است که روش‌های ارائه شده در این مبحث تنها مقدمه‌ای بر روش‌های عددی و تحلیلی می‌باشند و این مباحث به تفصیل در دوره‌های تحصیلات تکمیلی گرایش تبدیل انرژی ارائه می‌شوند.

#### الف- روش‌های تحلیلی (روش جداسازی متغیرها)

همچنانکه که پیشتر نیز اشاره شد در این مبحث از میان روش‌های تحلیلی مختلف برای حل معادلات انتقال حرارت هدایتی تنها به ذکر روش جداسازی متغیرها اکتفا خواهیم نمود. معادله پاره‌ای مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$a_1(x) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a_2(x) \frac{\partial T}{\partial x} + a_3(x)T + b_1(y) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + b_2(y) \frac{\partial T}{\partial y} + b_3(y)T = 0 \quad (1)$$

اگر  $a, b$  ها تابع  $T$  باشند آنگاه معادله غیر خطی بوده و با روش جداسازی متغیرها قابل حل نیست. فرض کنید بتوان جواب معادله فوق را بصورت زیر نوشت:

$$T(x, y) = X(x)Y(y) \quad (2)$$

با جایگذاری جواب فوق در معادله داده شده خواهیم داشت:

$$\left[ a_1(x) \frac{d^2 X}{dx^2} + a_2(x) \frac{dX}{dx} + a_3(x)X \right] \frac{1}{X} + \left[ b_1(y) \frac{d^2 Y}{dy^2} + b_2(y) \frac{dY}{dy} + b_3(y)Y \right] \frac{1}{Y} = \pm \lambda^2 \quad (3)$$

$$a_1(x) \frac{d^2 X}{dx^2} + a_2(x) \frac{dX}{dx} + [a_3(x) \pm \lambda^2]X = 0 \quad (4)$$

$$b_1(y) \frac{d^2 Y}{dy^2} + b_2(y) \frac{dY}{dy} + [b_3(y) \mp \lambda^2]Y = 0 \quad (5)$$

هنگامی می‌توان از روش جداسازی متغیرها برای حل تحلیلی مسائل انتقال حرارت دوبعدی استفاده نمود که شرایط زیر برقرار باشند:

- ۱- یکی از جهات مسئله را بتوان بوسیله یک معادله همگن با شرایط مرزی همگن جدا کرد.
- ۲- جهت دیگر مسئله را بتوان توسط یک معادله دیفرانسیل همگن با یک شرط مرزی همگن و یک شرط مرزی غیرهمگن نمایش داد.

توجه: علامت  $\lambda^2$  طوری باید انتخاب شود تا معادله دیفرانسیل مرزی (Boundary-Value) جهت همگن منجر به معادله مقدار مشخصه (Characteristic Value) گردد. یادآوری ۱: یک مسئله مقدار مرزی زمانی مقدار مشخصه است که جواب‌های آن پریودیک باشند. دامنه نوسان‌ها می‌توانند ثابت یا متغیر باشند. یادآوری ۲: یک مسئله مقدار مشخصه جواب‌های غیر بدیهی فقط برای مقادیر مشخصی از یکی از پارامترهای  $\lambda$  بنام Eigen Value دارد. مسئله مقدار مشخصه (Characteristic Value) زیر شامل یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم همگن را در نظر بگیرید.

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + f_1(x) \frac{du}{dx} + [f_2(x) + \lambda^2 f_3(x)]u = 0 \quad (6)$$

معادله فوق معادله Sturm-Liouville نام دارد. همچنین فرض کنید شرایط مرزی این مسئله همگن باشد. معادله (۶) با استفاده از فاکتور  $e^{\int f_1 dx} = p(x)$  بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{du}{dx} \right] + [q(x) + \lambda^2 w(x)]u = 0 \quad (7)$$

بطوریکه

$$\begin{aligned} q(x) &= f_2 p \\ w(x) &= f_3 p \end{aligned} \quad (8)$$

فرض کنید  $\lambda_m$  و  $\lambda_n$  دو مقدار مشخصه مختلف مسئله فوق باشند. می‌خواهیم نشان دهیم که توابع مشخصه (Characteristic function)  $\varphi_m$  و  $\varphi_n$  مربوط به  $\lambda_m$  و  $\lambda_n$  متعامد هستند و شرایط تعامد را پیدا نماییم.

چون داریم

$$\begin{aligned} u &= \varphi_m(x) \\ u &= \varphi_n(x) \end{aligned} \quad (9)$$

که جواب‌های غیر بدیهی معادله (۷) هستند بنابراین می‌نویسیم:

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d\varphi_m}{dx} \right] + [q(x) + \lambda_m^2 w] \varphi_m = 0 \quad \varphi_n \text{ در ضرب}$$

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d\varphi_n}{dx} \right] + [q(x) + \lambda_n^2 w] \varphi_n = 0 \quad -\varphi_m \text{ در ضرب}$$

با جمع دو عبارت فوق خواهیم داشت:

$$\varphi_n \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d\varphi_m}{dx} \right] - \varphi_m \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d\varphi_n}{dx} \right] + [\lambda_n^2 \lambda_m^2] \varphi_m \varphi_n w = 0 \quad (10)$$

یا:

$$[\lambda_n^2 - \lambda_m^2] \int_a^b \varphi_m \varphi_n w dx = \int_a^b \left\{ \varphi_n \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d\varphi_m}{dx} \right] - \varphi_m \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d\varphi_n}{dx} \right] \right\} \quad (11)$$

با انتگرالگیری جزء به جزء:

$$\left[ \lambda_n^2 - \lambda_m^2 \right] \int_a^b \varphi_m \varphi_n w dx = \left\{ \varphi_n \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d\varphi_m}{dx} \right] - \varphi_m \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d\varphi_n}{dx} \right] \right\}_a^b \quad (12)$$

لذا توابع  $\varphi_m$  و  $\varphi_n$  متعامد هستند هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

$$u(a) = u(b) = 0 \quad (13)$$

یا

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=a} = 0, \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=b} = 0, \quad (14)$$

یا

$$\left[ \frac{du}{dx} + Bu \right]_{x=a} = 0, \left[ \frac{du}{dx} + Bu \right]_{x=b} = 0 \quad (15)$$

اثبات رابطه (15) بصورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \varphi_n \varphi'_m - \varphi_m \varphi'_n &= \varphi_n \varphi'_m - \varphi_m \varphi'_n \pm B \varphi_m \varphi'_n \\ &= \varphi_n (\varphi'_m + B \varphi_m) - \varphi_m (\varphi'_n + B \varphi_n) \end{aligned} \quad (16)$$

توجه شود که اگر داشته باشیم  $\varphi(x) = 0$  در  $x=a$  یا  $x=b$  در اینصورت سمت راست معادله (12) حذف می‌شود و نیازی به شرایط مرزی جهت تحقق شرط تعامد نخواهد بود. توجه: اگر  $p(a)=p(b)$  و  $u(a)=u(b)$  و  $u'(a)=u'(b)$  آنگاه شرط تعامد ارضا می‌شود. به این حالت شرط مرزی پریودیک می‌گویند.

### بسط توابع بر حسب سری توابع متعامد

فرض کنید  $\varphi_n(x)$  مجموعه‌ای از توابع متعامد نسبت به تابع وزنی  $w(x)$  در فاصله  $(a,b)$  باشد. آنگاه می‌توان نوشت:

$$f(x) = b_0 \varphi_0(x) + b_1 \varphi_1(x) + b_2 \varphi_2(x) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varphi_n(x) \quad (17)$$

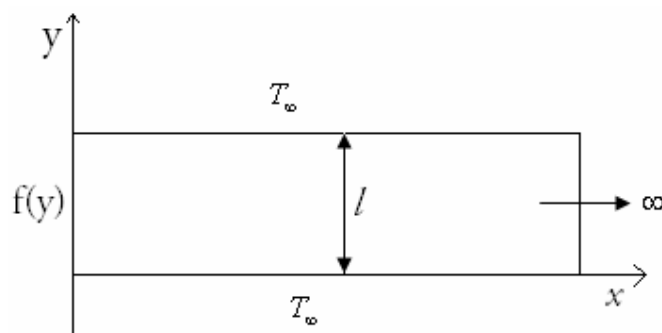
برای محاسبه  $b_m$  طرفین رابطه فوق را در  $w(x)\varphi_m(x)$  ضرب و در فاصله  $a$  تا  $b$  انتگرال می‌گیریم:

$$\int_a^b w(x) f(x) \varphi_m(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_a^b w(x) \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx \quad (18)$$

یا:

$$b_n = \frac{\int_a^b w(x) f(x) \varphi_n(x) dx}{\int_a^b w(x) \varphi_n^2(x) dx} \quad (19)$$

مثال: یک پره دوبعدی با طول بی‌نهایت به ضخامت  $l$  در نظر بگیرید. دمای پایه پره  $f(y)$  می‌باشد و دمای محیط  $T_{\infty}$  است و ضریب انتقال حرارت بسیار بزرگ می‌باشد. دمای حالت پایای پره را بیابید.



معادله حاکم همگن است ولی شرایط مرزی همگن نیستند

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (20)$$

$$T(0, y) = f(y)$$

$$T(\infty, y) = T_\infty \quad (21)$$

$$T(x, 0) = T_\infty$$

$$T(x, l) = T_\infty$$

فرض کنید  $\theta = T - T_\infty$  باشد خواهیم داشت:

$$\nabla^2 \theta = 0$$

$$\theta(0, y) = f(y) - T_\infty$$

$$\theta(\infty, y) = 0 \quad (22)$$

$$\theta(x, 0) = 0$$

$$\theta(x, l) = 0$$

اکنون جهت  $y$  همگن می‌باشد.

$$\theta = XY \Rightarrow \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \pm \lambda^2 \quad (23)$$

علامت  $\lambda^2$  باید طوری انتخاب گردد که جهت همگن  $y$  به مقدار مشخصه مسئله برسد. انتخاب

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0 \text{ به توابع هیپربولیک که متعامد نیستند منجر خواهد شد.}$$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0, X(x)Y(0) = \theta(x, 0) = 0$$

$$Y(0) = 0$$

$$X(x)Y(l) = \theta(x, l) = 0 \quad (23)$$

$$Y(l) = 0$$

$$X(\infty) = 0$$

$$Y = A \cos \lambda y + B \sin \lambda y \quad (24)$$

$$Y(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \quad (25)$$

$$Y(l) = 0 \Rightarrow B \sin \lambda y = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{m\pi}{l}, m = 1, 2, \dots \quad (26)$$

$$Y = B \sin \frac{m\pi}{l} y \quad (27)$$

$$X = C e^{-\lambda x} + D e^{\lambda x} \quad (28)$$

$$X(\infty) = 0 \Rightarrow D = 0 \quad (29)$$

$$X = C e^{-\lambda x} \quad (30)$$

$$\theta = B C e^{-\lambda x} \sin \lambda y \quad (31)$$

$$\theta = A_n e^{-\lambda_n x} \sin \lambda_n y = A_n e^{-\frac{n\pi}{l} x} \sin \frac{n\pi}{l} y \quad (32)$$

حال با استفاده از اصل برهم‌نهی خواهیم داشت:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n\pi}{l} x} \sin \frac{n\pi}{l} y$$

$$\theta(0, y) = f(y) \quad (33)$$

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l} y$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(y) \sin \frac{n\pi}{l} y dy, \quad A_n = \frac{\int_0^l f(y) \sin \frac{n\pi}{l} y dy}{\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi}{l} y dy} \quad (34)$$

$$\theta = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^l f(y) \sin \frac{n\pi \eta}{l} d\eta \right] e^{-\frac{n\pi x}{l}} \sin \frac{n\pi y}{l} \quad (35)$$

حال اگر  $\theta(0, y) = f(y) = \theta_0$  (const. value)

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \theta_0 \sin \frac{n\pi}{l} y dy = -\frac{2}{l} \frac{\theta_0}{m\pi} \cos \frac{n\pi}{l} y \Big|_0^l = -\frac{2}{m\pi} (\cos m\pi - 1) \quad (36)$$

$$n = 2k \Rightarrow A_n = 0 \quad (37)$$

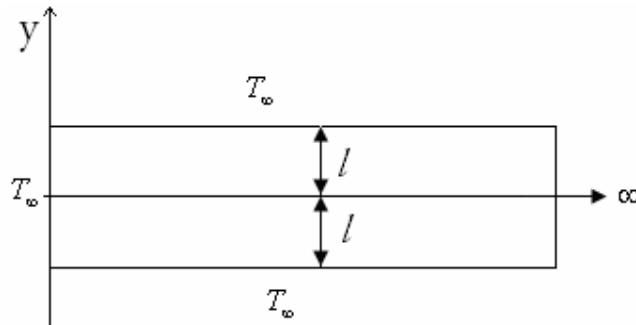
$$n = 2k + 1 \Rightarrow \cos n\pi = \cos(2k + 1)\pi = -1 \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

$$A_n = \frac{4}{(2k + 1)\pi} \theta_0 \quad (38)$$

$$\theta(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\theta_0}{(2k + 1)\pi} e^{-(2k+1)\frac{\pi x}{l}} \sin \frac{(2k+1)\pi y}{l} \quad (39)$$

$$T(x, y) = \theta(x, y) + T_0 \quad (40)$$

مثال: مسئله مثال قبلی با شرایط مرزی نشان داده شده در شکل، با استفاده از شرط تقارن حل نمایید.



$$A_n = \frac{\int_0^l \theta_0 \cos \frac{(2n+1)\pi}{2l} y dy}{\int_0^l \cos^2 \frac{(2n+1)\pi}{2l} y dy} \quad (41)$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad \text{یادآوری} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \int_0^l \cos^2 \frac{(2n+1)\pi}{2l} y dy &= \frac{1}{2} \int_0^l \left[ 1 + \cos^2 \frac{(2n+1)\pi y}{l} \right] dy \\ &= \frac{1}{2} \left[ y + \sin \frac{(2n+1)\pi y}{l} \right]_0^l = \frac{l}{2} \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \int_0^l \theta_0 \cos \frac{(2n+1)\pi}{2l} y dy &= \frac{2\theta_0 l}{\pi(2n+1)} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{2l} \Big|_0^l \\ &= \frac{2\theta_0 l}{\pi(2n+1)} \left[ \sin \frac{(2n+1)\pi}{2} - 0 \right] = \frac{2\theta_0 l}{\pi(2n+1)} (-1)^n \end{aligned} \quad (44)$$

$$A_n = \frac{4\theta_0}{\pi(2n+1)} (-1)^n \quad (45)$$

$$\theta(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\theta_0}{\pi(2n+1)} (-1)^n e^{-\frac{(2n+1)\pi x}{2l}} \cos \frac{(2n+1)\pi y}{2l} \quad (46)$$

## ب- روش‌های عددی

(۱) اختلاف محدود Finite Difference: روش کلاسیک و ساده از نظر برنامه نویسی و در تخمین خطای محاسبات است ولی برای حل مسائل در هندسه های پیچیده محدودیت دارد.

(۲) حجم محدود Finite Volume

الف) سازمان یافته Structured

ب) بی سازمان Unstructured

(۳) اجزاء محدود Finite Element

(۴) اجزاء مرزی Boundary Elements

مزایا: یک بعد از مسئله کم میشود.

معایب: قابلیت تعمیم به مسائل غیرخطی را در حالت عمومی ندارد.

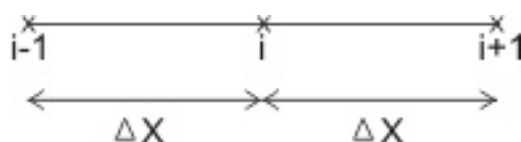


۵) روش های بدون شبکه Mesh-less Methods به تازگی ارائه شده است تلاش این روش ها اجتناب از تولید شبکه (نقاط) به منظور صرفه جوئی در زمان حل می باشد. البته هنوز مسائل ناشناخته (از نظر دقت و حجم محاسبات) بسیار دارد.

### روش اختلاف محدود Finite Difference

معادله حاکم بر انتقال گرما در حالت دائمی بدون چشمه حرارتی در دو بعد به صورت زیر نوشته می شود.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (47)$$



شکل یک شبکه یکنواخت اختلاف محدود

حال با استفاده از بسط سری تیلور معادله مشتقات مرتبه دوم فوق را بسط می دهیم، ابتدا در جهت X داریم:

$$\begin{aligned} T_{i+1} &= T_i + \Delta x \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dots \\ T_{i-1} &= T_i - \Delta x \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \dots \\ T_{i+1} - T_{i-1} &= 2T_i + (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (\Delta x)^4 \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} \times \frac{2}{4!} + \dots \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{1}{\Delta x^2} (T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}) - \frac{2\Delta x^2}{4!} \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) + \dots \end{aligned} \quad (48)$$

order2

با صرف نظر کردن از سایر پارامترهای (از مرتبه دوم به بعد) خواهیم داشت:

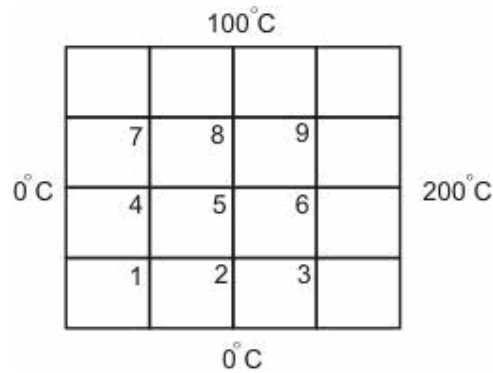
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cong \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (49)$$

به همین ترتیب در جهت Y داریم:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \cong \frac{T_{j+1} - 2T_j + T_{j-1}}{\Delta y^2} \quad (50)$$

\* اختلاف مرکزی با سه نقطه مشتق مرتبه دوم را با دقت  $(\Delta x)^2$  تقریب می زند.

- مثال دمای نقاط شماره گذاری می شود و برای هر گره معادلات بالا نوشته می شود.



برای گره شماره ۱ می‌توان نوشت:

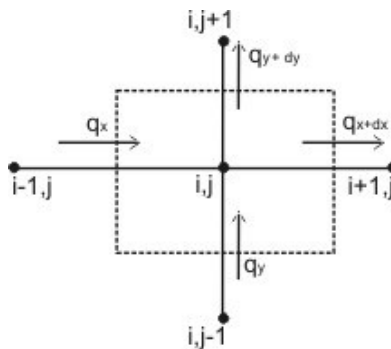
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (51)$$

$$\frac{T_2 - 2T_1 + 0}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} + \frac{T_4 - 2T_1 + 0}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 0 \quad (52)$$

$$T_2 + T_4 - 4T_1 = 0 \quad (1) \quad (53)$$

به همین ترتیب ۸ معادله دیگر نیز به دست می‌آوریم و ۹ معادله و ۹ نقطه و به همین ترتیب معادله جبری دمای تمام نقاط بدست می‌آید و با حل این معادلات جبری دمای تمامی نقاط مسئله بدست خواهد آمد.

- روش موازنه انرژی: (حالت خاص از روش حجم محدود)

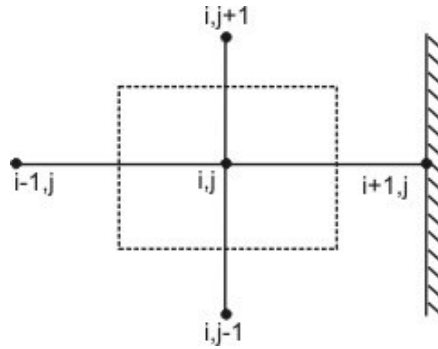


$$q_{dx} = k \frac{T_{i,j} - T_{i,j+1}}{\Delta y} \times \Delta x \times 1 \quad (54)$$

$$\Rightarrow T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} + T_{i+1,j} - 4T_{i,j} = 0$$

بافرض  $k$  ثابت و  $\Delta x = \Delta y$

**مثال:** اگر عایق داشته باشیم:



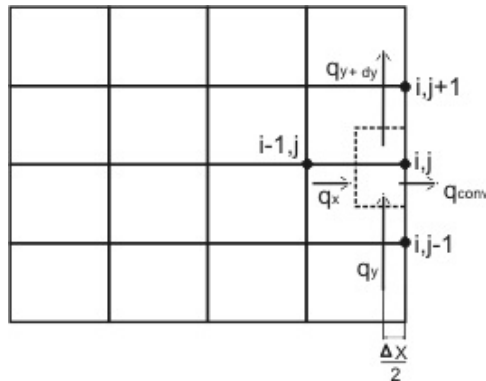
$$q_{x+dx} = 0$$

$$q_x + q_y = q_{x+dx} + q_{y+dy}$$

(۵۵)

$$\Rightarrow T_{i-1,j} + T_{i,j} + T_{i,j+1} - 3T = 0$$

در مرز محدود به سیال در جابجائی:



$$q_x + q_y = q_{y+dy} + q_{conv}$$

(۵۶)

$$\frac{k(T_{i-1,j} - T_{i,j})}{\Delta x} \Delta y + \frac{k(T_{i,j} - T_{i,j+1})}{\Delta y} \frac{\Delta x}{2} = h(T_{i,j} - T_\infty) + k \frac{(T_{i,j} - T_{i,j+1})}{\Delta y} \frac{\Delta x}{2}$$

(۵۷)

به طور کلی برای معادلات گره ها می توان یک دستگاه معادله ماتریسی به صورت زیر نوشت:

$$KT=F$$

برای حل معادله بالا روش های گوناگونی می باشد:

- روش های مستقیم *Direct Methods*: مانند روش *Gauss Elimination*
- روش های تکراری *Iterative Methods*: که به عنوان مثال می توان روش *Gauss-Seidel* و روش *Jacobi* را نام برد.

### مسائل

۱. دمای داخلی و خارجی شیشه پنجره ای به ترتیب  $15^{\circ}\text{C}$  و  $5^{\circ}\text{C}$  می‌باشد. اگر ضخامت شیشه  $5\text{mm}$  و ابعاد آن  $1 \times 3$  متر باشد مطلوبست اتلاف حرارت از شیشه ضریب هدایت حرارتی شیشه  $1.4 \text{ W/m}^2\text{K}$  است.

۲. هوا در دمای  $300^{\circ}\text{C}$  از روی صفحه ای به ابعاد  $0.5 \times 0.25$  متر جریان دارد اگر ضریب انتقال حرارت جابجائی  $250 \text{ W/m}^2\text{K}$  باشد مطلوبست انتقال حرارت از یکطرف این صفحه دمای صفحه  $400^{\circ}\text{C}$  است.

۳. صفحه ای فلزی از یکطرف کاملاً عایق شده است در حالیکه طرف دیگر آن انرژی تشعشعی به شدت  $800 \text{ W/m}^2$  دریافت می‌کند. اگر دمای محیط  $20^{\circ}\text{C}$  و ضریب انتقال حرارت جابجائی بین صفحه و محیط  $12 \text{ W/m}^2\text{K}$  باشد مطلوبست افت دمای صفحه فلزی.

۴. توزیع دما در دیواری یک بعدی با هدایت  $50 \text{ W/mK}$  و ضخامت  $50\text{mm}$  به صورت  $T = a + bx^2$  می‌باشد که  $a = 200^{\circ}\text{C}$  و  $b = -2000^{\circ}\text{C/m}^2$  و  $x$  برحسب  $m$  است. مطلوب است تعیین نرخ تولید حرارت در این دیوار و شار حرارتی در دو وجه آن. توزیع دما در شرایط دائمی و مستقل از زمان می‌باشد.

۵. مطلوبست محاسبه اتلاف حرارت به ازاء واحد سطح از دیوار کوره ای که جدار آن از فولاد به ضخامت  $0.5\text{cm}$  و  $k = 40 \text{ W/mK}$  بوده و جدار خارجی آن آجری به ضخامت  $10\text{cm}$  و  $k = 2.5 \text{ W/mK}$  می‌باشد. دمای جدار داخلی  $900\text{K}$  و دمای جدار خارجی  $460\text{K}$  فرض شود. دمای فصل مشترک فولاد و آجر را نیز محاسبه کنید.

۶. در طراحی مبدل حرارتی یک هواپیما دمای ماکزیمم دمای دیواره نباید از  $800\text{K}$  تجاوز کند. برای شرایطی که در شکل نشان داده شده است مطلوبست محاسبه مقاومت ماکزیمم مجاز دیوار.

$$T_g = 1300\text{K}$$

$$T_c = 300\text{K}$$

$$h_g = 200 \text{ W/m}^2\text{K}$$

$$h_c = 400 \text{ W/m}^2\text{K}$$

$hg$  = ضریب انتقال حرارت جابجائی گازهای داغ است.

۷. یک لوله از جنس فولاد زنگ با ضریب هدایت حرارتی  $19 \text{ W/m}^\circ\text{C}$  به قطر داخلی 2cm و قطر خارجی 4cm بوسیله 3cm لایه عایق آزبست پوشانیده شده است. اگر دمای جدار داخلی 600 oC و دمای جدار خارجی عایق 100 oC باشد مطلوبست انتقال حرارت به ازاء واحد طول لوله.

$$k = 0.2 \text{ W/mK} \text{ آزبست}$$

۸. دیواری آجری به ضخامت 0.1m و ضریب هدایت حرارتی  $0.7 \text{ W/mK}$  از یکطرف در معرض باد سرد به دمای 270K و ضریب انتقال حرارت جابجائی  $40 \text{ W/m}^2\text{K}$  و از طرف دیگر در معرض هوای سالن به دمای 330K و ضریب انتقال حرارت جابجائی  $10 \text{ W/m}^2\text{K}$  قرار دارد. مطلوبست اتلاف حرارت از این دیوار به ازاء واحد سطح.

۹. جدار داخلی لوله نازکی به شعاع داخلی  $r_i$  در دمای  $T_i$  قرار دارد. اگر این لوله در معرض محیطی به دمای  $T_\infty$  و ضریب جابجائی  $h_\infty$  قرار داشته باشد مطلوبست تعیین ضخامت عایق بهینه برای این لوله از مقاومت حرارتی لوله صرفنظر کنید و فقط عایق را در نظر بگیرید. نتیجه فوق را برای لوله ای مسی به قطر 10mm و ضخامت عایق 0,2,5,10,40mm امتحان کنید. ضریب جابجائی  $5 \text{ W/m}^2\text{K}$  و هدایت حرارتی عایق  $0.055 \text{ W/m}^2\text{K}$  فرض شود.

۱۰. در استوانه ای توپر (Solid) به شعاع  $r_i$  چشمه حرارتی یکنواختی به شدت  $\dot{q}$  تولید می شود. اگر این استوانه در معرض محیطی به دمای  $T_\infty$  و ضریب جابجائی  $h_c$  قرار گرفته باشد ثابت کنید:

$$\frac{T(r) - T_\infty}{T_\infty} = \frac{\dot{q} r_i}{4 h_c T_\infty} \left\{ 2 + \frac{h_c r_i}{k} \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_i} \right)^2 \right] \right\}$$

۱۱. جریان الکتریکی به شدت 700A در کابلی فولادی به قطر 5mm و مقاومت  $6 \times 10^{-4} \text{ K/W}$  جریان دارد. این کابل در معرض هوای  $30^\circ\text{C}$  و ضریب جابجائی  $25 \text{ W/m}^2\text{K}$  قرار دارد. دمای سطح این کابل را محاسبه کنید. از مقاومت حرارتی فولاد صرفنظر کنید.

۱۲. دمای جدار داخلی لوله ای که در آن بخار جریان دارد  $300^{\circ}\text{C}$  است. قطر داخلی این لوله 5cm و ضخامت آن 5.5mm است. این لوله توسط دو لایه عایق پوشانده شده است. ضخامت لایه اول 9cm و هدایت حرارتی آن  $50 \text{ W/m}^2\text{K}$  و ضخامت لایه دوم 4cm و هدایت حرارتی آن  $0.35 \text{ W/m}^2\text{K}$  می باشد. دمای سطح خارجی لوله عایق  $30^{\circ}\text{C}$  است. اتلاف حرارت به ازاء واحد طول این لوله را محاسبه کنید. هدایت حرارتی لوله  $47 \text{ W/m}^2\text{K}$  فرض شود. هرگاه این لوله در اتاقی در مجاورت هوای  $20^{\circ}\text{C}$  قرار گرفته باشد. مطلوبست ضریب جابجائی انتقال حرارت بین لوله و هوای اتاق.

۱۳. استوانه ای از جنس فولاد ضدزنگ  $(k = 13 \text{ Btu/hrft}^{\circ}\text{F})$  بطول 1' و قطر 4" جهت انجام عملیات حرارتی از کوره ای به طول 20 ft عبور می دهند. دمای نهائی آن هنگام خروج از کوره  $1500^{\circ}\text{F}$  است. اگر دمای گازهای داخل کوره  $2300^{\circ}\text{F}$  و ضریب انتقال حرارت جابجائی  $18 \text{ Btu/hrft}^{2^{\circ}}\text{F}$  باشد مطلوبست سرعت عبور استوانه از داخل کوره  $(\alpha = 0.27 \text{ ft}^2/\text{h})$

۱۴. آجری از جنس نسوز  $(\alpha = 0.02 \text{ ft}^2/\text{hr}, h = 0.65)$  در دمای اولیه یکنواخت  $100^{\circ}\text{F}$  را در معرض گازهای داغ  $1200^{\circ}\text{F}$  قرار می دهند. ضریب جابجائی  $4 \text{ Btu/hrft}^{2^{\circ}}\text{F}$  بوده و برای کلیه سطوح آجر یکسان است. مطلوبست دمای مرکز آجر پس از گذشت 20 hr در حالتهای (a) دیوار بی نهایت به ضخامت 2 ft (b) ستون بسیار بلند به سطح مقطع  $2' \times 2'$  (c) مکعب به ابعاد  $2 \times 2 \times 2$  که یک وجه آن روی سطح عایقی قرار گرفته است.

۱۵. استوانه ای به قطره 5" از جنس آلومینیم است  $\rho = 36 \frac{\text{lbm}}{\text{ft}^3}, C_p = 0.25 \frac{\text{Btu}}{\text{lbm}^{\circ}\text{F}}, h = 0.125 \frac{\text{Btu}}{\text{hrft}^{\circ}\text{F}}$  در دمای اولیه یکنواخت  $100^{\circ}\text{F}$  را در محیطی به دمای  $1200^{\circ}\text{F}$  با ضریب جابجائی  $4 \text{ Btu/hrft}^{\circ}\text{F}$  قرار می دهند. زمان لازم برای آنکه دمای مرکز استوانه به  $500^{\circ}\text{F}$  برسد را در حالتهای زیر محاسبه

کنید. (a) استوانه خیلی بلند (b) استوانه به ارتفاع ۲ فوت که روی سطحی عایق ایستاده است.

۱۶. یک اتوی خانگی به وزن 3lb و از جنس آلومینیوم بوسیله المانهای الکتریکی به قدرت 50W گرم می شود. اگر سطح خارجی اتو  $0.5\text{ft}^2$  دمای هوای محیط  $70^\circ\text{F}$  و ضریب جابجایی  $2.0\text{BTu}/\text{hft}^2\text{ }^\circ\text{F}$  باشد مطلوبست زمان لازم برای آنکه دمای اتو به  $220^\circ\text{F}$  برسد دمای اولیه اتو دمای محیط است.

## فصل چهارم: انتقال حرارت هدایت-ناپایدار و گذرا

### Unsteady Conduction Heat Transfer

دربسیاری از کاربردهای مهندسی با مسائل انتقال حرارت هدایت ناپایدار و گذرا مواجه می‌شویم. به عنوان مثال انتقال حرارت از دیواره سیلندر موتورهای احتراق داخلی از جمله مسائلی است که در آن دمای جداره با زمان تغییر می‌کند. البته به دلیل تغییرات پیرویدیک شرایط داخلی سیلندر (دمای هوا یا گاز) شاید بتوان تغییرات دما جداره داخلی را به صورت تابع معینی از زمان یا با تقریب بیشتر به صورت پیرویدیک فرض کرد. برعکس تغییرات دمای مجموعه سیلندر از زمان روشن شدن موتور تا لحظه رسیدن به شرایط دائمی تابع بسیار پیچیده‌ای از زمان می‌باشد و پیش بینی دمای جداره و سپس تعیین دمای آب خنک کن یا روغن جهت طراحی سیستم خنک کاری و روغنکاری اهمیت ویژه‌ای دارد. مثالهای دیگری می‌توان برای انتقال حرارت ناپایدار در زندگی روزمره پیدا کرد. مثلاً سرد شدن ناگهانی هوا و تغییرات دمای سطوح زمین با زمان از آن جمله می‌باشد. همچنین در مراحل ساخت قطعات از طریق ریخته گری کلیه مراحل سرد شدن و انجماد مذاب در قالب ماسه از جمله مسائل انتقال حرارت ناپایدار یا گذرا می‌باشد. در متن حاضر منظور از ناپایدار (Unsteady) یعنی دما همواره با زمان متغیر است در حالیکه واژه گذرا (Transient) برای حالتی بکار می‌رود که دمای جسم پس از گذشت زمان معینی به شرایط دائمی و مستقل از زمان برسد. بدیهی است که بین دو حالت فوق می‌توان در حالت ایده آل شرایط پیرویدیک را نیز مدلسازی کرد.

معادلات حاکم انتقال حرارت هدایت ناپایدار یا گذرا در مختصات متعامد دکارتی، استوانه‌ای یا کروی و به شرط خطی بودن معادلات دارای حل‌های تحلیلی می‌باشد و روشهای مختلفی برای حل آن پیشنهاد شده است. کتابهای Ozicik, Myers و یا Carslaw and Jager حاوی راه حل‌های متنوعی برای هندسه‌های مختلف و شرایط مرزی مختلف می‌باشد و می‌توان به صورت Hand Book توسط دانشجویان کارشناسی بکار رود. درمقاطع تحصیلات تکمیلی کتابهای فوق به صورت کتاب درسی به دانشجویان پیشنهاد می‌شود تا دانش و تکنیک‌های ریاضی آنان را تقویت کند.

معادلات حاکم در هندسه‌های پیچیده و شرایطی که ضریب انتقال حرارت هدایت، چشمه حرارتی و سایر خواص فیزیکی به صورت غیرخطی هستند امروزه به کمک روش‌های عددی کلاسیک به آسانی حل می‌شود و بسیاری از نرم افزارهای تجاری مانند ANSYS، NISA و Fluent قابلیت حل این معادلات را دارند.

دراین فصل دانشجویان با روشهای تقریبی ولی بسیار کاربردی حل مسائل ناپایدار و همچنین با روشهای حل تحلیلی و نتایج آن آشنا می‌شوند. ضمناً در انتهای فصل روش عددی اختلاف محدود مورد بحث قرار گرفته و دانشجویان با این روش حل نیز آشنا خواهند شد.



## معادلات حاکم

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \dot{q}'''/k = 1/\alpha \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

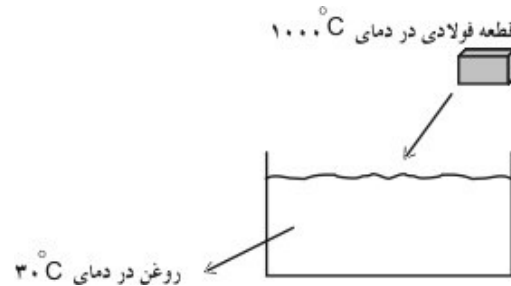
در مختصات کارتزین

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + 1/r \frac{\partial T}{\partial r} + \dot{q}'''/k = 1/\alpha \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (2)$$

در مختصات استوانه ای

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} \text{ Diffusivity } \left[ \frac{m^2}{s} \right] \quad (3)$$

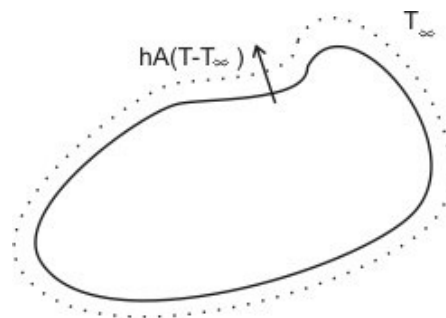
در معادلات فوق  $\dot{q}'''$  چشمه حرارتی،  $\tau$  زمان،  $k$  ضریب انتقال حرارت هدایت و  $\alpha$  ضریب پخش می باشد.



مثالی برای هدف فیزیکی:

**هدف:** تعیین مدت زمان سرد شدن و نحوه تغییرات دمای قطعه با زمان.

## ۱. روش ظرفیت انباشته یا ظرفیت فشرده Lumped Capacity System



جسم ناگهان در محیطی به دمای  $T_\infty$  قرار می گیرد

$\rho$	جرم مخصوص
$C$	گرمای ویژه
$V$	حجم
$A$	سطح جانبی
$T_0$	دمای اولیه

در سیستم انباشته فرض می‌شود توزیع دما در جسم یکنواخت و تنها تابعی از زمان باشد. از نظر فیزیکی یعنی مقاومت هدایتی در داخل جسم در مقایسه با مقاومت جابجایی از سیال محیط کمتر باشد. این فرض وقتی مجاز است که شرایط زیر برقرار باشد:

$$\frac{h}{k} \left( \frac{\text{حجم قطعه}}{\text{سطح جانبی}} \right) < 0.1 \quad (۴)$$

مقدار  $\frac{hx}{k}$  به عنوان عدد بی‌بعد بيو (Biot) شناخته می‌شود (X طول مشخصه است) و با علامت  $Bi$  نشان داده می‌شود به این ترتیب شرط فوق بصورت زیر بیان می‌گردد:

$$Bi = \frac{hx}{k} < 0.1 \quad (۵)$$

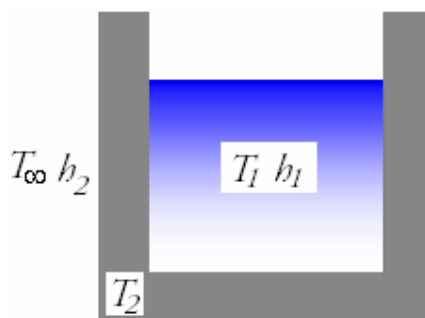
از موازنه انرژی: تغییرات انرژی داخلی = حرارت جابجا شده به محیط

$$hA(T - T_{\infty}) = -\rho c V \frac{\partial T}{\partial \tau} \Rightarrow \frac{T - T_{\infty}}{T_o - T_{\infty}} = e^{-\frac{hA}{\rho c V} \tau} \quad (۶)$$

$$\text{شرط اولیه} \begin{cases} \tau = 0 \\ T = T_o \end{cases} \quad (۷)$$

### سیستم انباشته چندگانه

فرض کنید در داخل ظرف فلزی مایعی قرار دارد، ظرف و مایع درون آن هر دو در دمایی یکسان (متفاوت با دمای محیط اطراف) قرار دارند. حال کل سیستم گفته شده در دمای محیط قرار داده می‌شود و دمای سیستم شروع به تعادل با دمای محیط می‌نماید. هدف یافتن دمای ظرف و محتویات آن به عنوان تابعی از زمان است.



معادلات حاکم بصورت زیر می‌باشند:

$$\begin{cases} h_1 A_1 (T_1 - T_2) = -\rho_1 C_1 V_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} \\ h_1 A_1 (T_2 - T_1) + h_2 A_2 (T_2 - T_{\infty}) = -\rho_2 C_2 V_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} \end{cases} \quad (۸)$$

با شرایط اولیه:

$$\begin{cases} T_1 = T_2 = T_0 \\ \frac{\partial T_1}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (۹)$$

با نوشتن معادلات به صورت اپراتوری معادلات حاکم به شکل زیر تبدیل می‌شوند:

$$\begin{cases} \left( \frac{h_1 A_1}{\rho_1 C_1 V_1} + D \right) T_1 - \frac{h_1 A_1}{\rho_1 C_1 V_1} T_2 = 0 \\ -\frac{h_1 A_1}{\rho_2 C_2 V_2} T_2 - \left( \frac{h_1 A_1}{\rho_2 C_2 V_2} + \frac{h_2 A_2}{\rho_2 C_2 V_2} + D \right) T_2 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

با در نظر گرفتن پارامترهای زیر:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{h_1 A_1}{\rho_1 C_1 V_1} \\ K_2 &= \frac{h_1 A_1}{\rho_2 C_2 V_2} \\ K_3 &= \frac{h_2 A_2}{\rho_2 C_2 V_2} \end{aligned} \quad (11)$$

معادلات به فرم زیر ساده‌تر می‌شوند:

$$\begin{cases} (K_1 + D)T_1 - K_1 T_2 = 0 \\ -K_2 T_2 - (K_2 + K_3 + D)T_2 = 0 \end{cases} \quad (12)$$

با حل دستگاه معادلات فوق دمای ظرف و محتویات آن به صورت تابعی از زمان بدست می‌آیند:

$$T_1 = T_\infty + Me^{m_1 t} + Ne^{m_2 t} \quad (13)$$

$$T_2 = T_1 + \frac{T_\infty + Me^{m_1 t} + Ne^{m_2 t}}{K_1} \quad (14)$$

در روابط فوق ثوابت به صورت زیر تعریف شده‌اند:

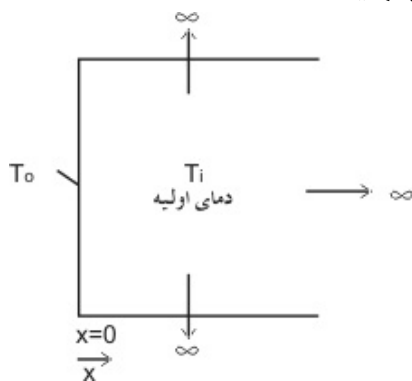
$$m_1 = \frac{-(K_1 + K_2 + K_3) + \sqrt{(K_1 + K_2 + K_3)^2 - 4K_1 K_3}}{2} \quad (15)$$

$$m_2 = \frac{-(K_1 + K_2 + K_3) - \sqrt{(K_1 + K_2 + K_3)^2 - 4K_1 K_3}}{2} \quad (16)$$

$$M = \frac{T_0 - T_\infty}{m_1 - m_2} m_2 \quad (17)$$

$$N = \frac{T_0 - T_\infty}{m_1 - m_2} m_1 \quad (18)$$

## ۲. هدایت گذرا در جسم نیمه بی نهایت Semi-Infinite



الف) ناگهان در لحظه  $\tau = 0$  دمای سطح به  $T_0$  می رسد.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + q'''/k = 1/\alpha \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 1/\alpha \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad , \quad T(x, \tau) = ? \text{ هدف}$$

$$T(0, \tau) = T_0 \quad \tau > 0 \quad \text{شرط مرزی} \quad (20)$$

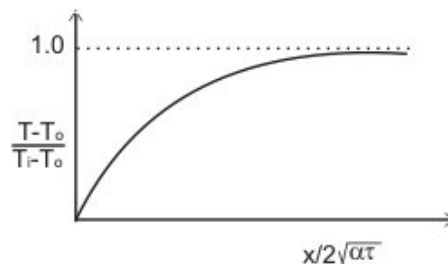
$$T(x, 0) = T_i \quad \text{شرط اولیه}$$

به کمک تبدیل لاپلاس

$$\frac{T(x, \tau) - T_0}{T_i - T_0} = \text{erf} \frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} \quad (21)$$

$$Q = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{kA(T_0 - T_i)}{\sqrt{\pi\alpha\tau}}$$

ب) شار حرارتی ثابت: سطح در لحظه  $\tau = 0$  تحت شار حرارتی ثابتی قرار می گیرد.



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 1/\alpha \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

$$\begin{cases} T(x, 0) = T_i \\ -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_0 \end{cases} \quad \tau > 0$$

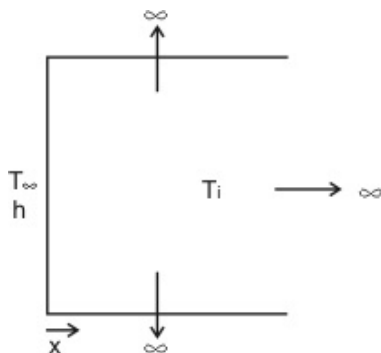
جواب تحلیلی:

$$T - T_i = \frac{2Q_0 \sqrt{\alpha\tau/\pi}}{kA} \exp(-x^2/4\alpha\tau)$$

$$-\frac{Q_0 x}{kA} (1 - \text{erf} \frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}})$$

$$T - T_i = \frac{2q_0}{k} \sqrt{\alpha\tau/\pi} \exp(-x^2/4\alpha\tau) - \frac{q_0 x}{k} (1 - \text{erf} \frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}})$$

ت) جسم نیمه بی نهایت ناگهان در محیطی به دمای  $T_\infty$  قرار می گیرد.



شرط اولیه

$$T(x, 0) = T_i$$

$$hA(T_\infty - T)|_{x=0} = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad \tau > 0 \quad \text{شرط مرزی:}$$

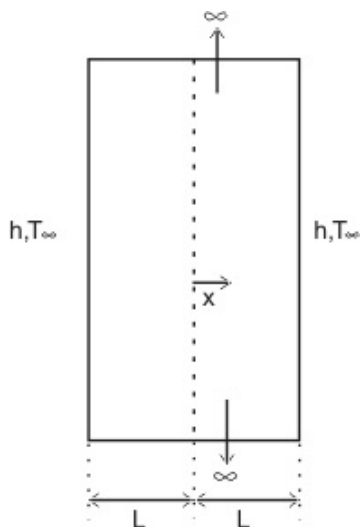
$$\frac{T - T_i}{T_\infty - T_i} = 1 - \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} - \left[ \exp\left(\frac{hx}{k} + \frac{h^2\alpha\tau}{k^2}\right) \times \right. \quad \text{جواب تحلیلی:}$$

$$\left. \left[ 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} + \frac{h\sqrt{\alpha\tau}}{k}\right) \right] \right]$$

۳. هدایت گذرای یک بعدی در اجسامی مانند صفحه، استوانه و کره که در معرض

جابجائی قرار دارند

(a) صفحه بی نهایت



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (a)$$

$$T(x, 0) = T_i \quad \tau = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad \tau > 0$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = -\frac{h}{k}(T - T_{\infty}) \Big|_{x=L} \quad \tau > 0$$

حل معادله (a) به کمک روش Separation of Variables امکان پذیر است. برای حل به کتاب Myers مراجعه کنید.

جواب:

$$T(x, \tau) - T_{\infty} = 2 \frac{hL}{k} (T_i - T_{\infty}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n L \cos \lambda_n x}{\lambda_n L \left( \frac{hL}{k} + \sin^2 \lambda_n L \right)} e^{-(\lambda_n L)^2 \frac{\alpha \tau}{L^2}} \quad (b)$$

که  $\lambda_n$  از رابطه زیر محاسبه می شود.

$$\lambda_n L \tan \lambda_n L = \frac{hL}{k} \quad \text{و} \quad \frac{hL}{k} = Biot \text{ عددی}$$

از نظر فیزیکی دو عامل در انتقال حرارت تاثیر دارد. اولی نسبت مقاومت هدایت به مقاومت جابجائی است که با عدد  $Bi$  زیر نشان می دهند.

$$Bi = \frac{hL}{k} \quad (22)$$

دومی میزان نفوذ موج دما در جسم است که با عدد فوریه نشان می دهند.

$$Fo = \frac{\alpha \tau}{L^2} \quad (23)$$

$\alpha = \frac{k}{\rho c}$  هر چه  $\alpha$  بزرگتر باشد یعنی  $k$  بزرگتر است و یا میزان نفوذ در اثر هدایت حرارت بیشتر

است. Heisler رابطه (b) را به صورت منحنی هائی رسم کرده است. در این منحنی ها تاثیر اعداد بی بعد  $Fo$  و  $Bi$  به وضوح دیده می شود. در این منحنی ها داریم:

$$\begin{aligned} \theta &= T(x, \tau) - T_{\infty} & T_i &= \text{دمای اولیه} \\ \theta_i &= T_i - T_{\infty} & T_o &= \text{دمای مرکز} \\ \theta_o &= T_o - T_{\infty} \end{aligned} \quad (24)$$

از منحنی (ت-۱) می توان دمای مرکز صفحه را در زمانهای مختلف و برای شرایط مختلف محاسبه کرد.

اگر دما در نقاط دیگری لازم باشد می توان از منحنی (ت-۲) نسبت  $\frac{\theta}{\theta_o}$  را بدست آورد آنگاه به

کمک رابطه:

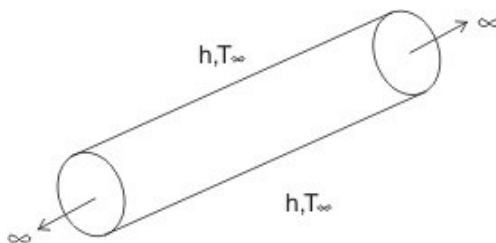
$$\frac{\theta}{\theta_i} = \left( \frac{\theta_o}{\theta_i} \right) \left( \frac{\theta}{\theta_o} \right)$$

دمای  $\theta$  را محاسبه کنید.

{برای محاسبه حرارت منتقل شده در هر لحظه می توان از منحنی (ت-۳) استفاده کرد}.

$$\begin{cases} Q = \tau & \text{حرارت تلف شده تا لحظه } \tau \\ Q_0 = \rho CV(T_i - T_\infty) \end{cases}$$

(b) استوانه بی نهایت



$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

$$\left. \begin{aligned} Bi &= \frac{hr_o}{k} \\ Fo &= \alpha \tau / r_o^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} T(r, 0) &= T_i \\ T(0, \tau) &= \text{معین} \\ -k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_o} &= h[T(r_o, \tau) - T_\infty] \end{aligned}$$

(c) کره

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rT) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

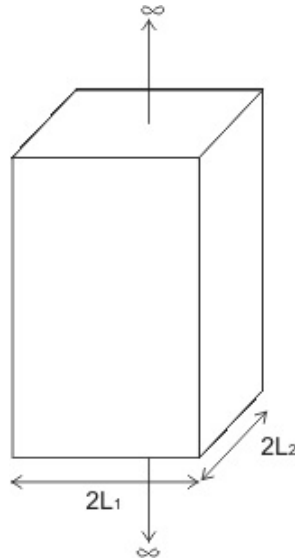
$$T(0, \tau) = \text{Finite}, T(r, 0) = T_i, -h \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_o} = h[T(r_o, \tau) - T_\infty]$$

$$\left. \begin{aligned} Bi &= \frac{hr_o}{k} \\ Fo &= \alpha \tau / r_o^2 \end{aligned} \right\}$$

هنگام استفاده از منحنی‌های Heisler باید توجه شود که این منحنی‌ها برای عدد فوریه بیشتر از ۰/۲ صادق است. در فوریه کمتر از ۰/۲ برای آنکه سری‌های فوریه همگرا شوند لازم است که جملات بیشتری از Summation محاسبه شوند که این عمل در منحنی‌های Heisler انجام نشده است.

(۴) هدایت گذرا در اجسام چند بعدی

(a) میله ای به طول بی نهایت



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (25)$$

فرض

$$T = T_1(x, \tau) \times T_2(y, \tau) \quad (26)$$

با جانشین کردن (۲۶) در (۲۵) نتیجه می شود.

$$\frac{1}{T_1} \left( \frac{\partial T_1}{\partial \tau} - \alpha \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} \right) = - \left( \frac{\partial T_2}{\partial \tau} - \alpha \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} \right) \frac{1}{T_2} \quad (27)$$

در نتیجه منجر به حل دو مسئله هدایت در صفحات بی نهایت به ضخامت  $2L_1$  و  $2L_2$  می شود این دو حالت توسط منحنی های Heisler قابل حل هستند لذا می توان نوشت:

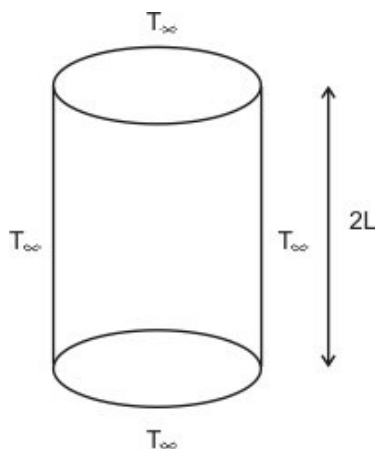
$$\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \left( \frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right)_{2L_1} \times \left( \frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right)_{2L_2} \quad (28)$$

(b) مکعب به ابعاد  $2L_1 \times 2L_2 \times 2L_3$

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \left( \frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right)_{2L_1} \times \left( \frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right)_{2L_2} \times \left( \frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right)_{2L_3} \quad (29)$$

(c) استوانه به طول محدود و معین



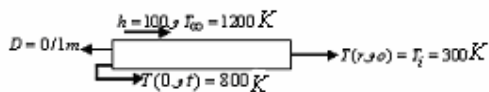


$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

$$T = T_1(r, \tau) \times T_2(z, \tau) \quad (30)$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \left( \frac{T - T_\infty}{T_\lambda - T_\infty} \right)_{cyl} \times \left( \frac{T - T_\infty}{T_1 - T_\infty} \right)_{2L صفحه}$$

**مثال:** محورهای فولادی به قطر 0.11 متر در کوره ای گاز سوز بادمای 1200K و ضریب جابجایی  $100 \frac{W}{m^2 K}$  قرارداده می شود. اگر دمای اولیه محور 300K باشد چه مدت طول می کشد تا دمای مرکز آن به 800K برسد؟



طبق جدول ضمیمه کتاب:

$$\rho = 7832 \text{ و } k = 51.2$$

$$C = 541, \alpha = 1.21 \times 10^{-5}$$

$$Bi = \frac{hr_o/2}{k} = \frac{100 \times 0.05}{51.2} = \%488$$

⇐ پس می توان از روش انباشته استفاده کرد.

$$\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-\frac{hA}{\rho V c} t} = e^{-\frac{4h}{\rho c D} t}$$

$$\ln\left(\frac{800 - 1200}{300 - 1200}\right) = -0.811 = -\frac{4 \times 100}{7832 \times 541 \times 0.1} t$$

$$\Rightarrow t = 860(s) = 14 : 20 \text{ دقیقه}$$

**مثال:** میله ای بلند به قطر 40mm از یاقوت کبود ساخته شده (یاقوت کبود همان  $Al_2O_3$  دمای

اولیه آن 800K و ناگهان با سیالی با دمای 300K و  $h = 1600 \frac{W}{m^2 K}$  خنک می شود پس از ۳۵ ثانیه عایقی به دور میله پیچیده می شود. دمای میله پس از زمانی طولانی به چه مقدار می رسد؟ (جدول خواص در انتهای کتاب)

$$\rho = 3970 \text{ و } c = 1068 \text{ و } k = 22.3 \text{ و } \alpha = 5.259 \times 10^{-5}$$

$$Bi = \frac{hL_c}{k} = \frac{hr_{io}}{2k} = \frac{1600 \times \frac{0.02}{2}}{22/3} = \underline{0.72 > 0.1}$$

حرارت تلف شده (از رابطه انرژی) حرارت تلف شده تا زمان ۳۵

$$-Q = \rho c v (\bar{T}(\infty) - T_{\infty}) - Q_o$$

$$\text{و } Q_o = \rho c v (T_i - T_{\infty})$$

$$\bar{T}(\infty) = T_{\infty} + (T_i - T_{\infty})(1 - Q/Q_o)$$

از نمودار (ت-۶) داریم:

$$Bi = \frac{hr_o}{k} = \frac{1600 \times 0.02}{22.3} = 1.43$$

$$Bi^2 F_o = Bi^2 \left( \frac{\alpha t}{r_o^2} \right) = 0.95$$

$$Q/Q_o \cong 0.56 \Rightarrow \bar{T} = 300 + (800 - 300)(1 - 0.56) = 561K$$

توجه:

$\bar{T}(\alpha)$  دمای میانگین سطح و هسته استوانه در زمان  $t = 35_s$  است.

حل عددی معادله انتقال حرارت ناپایدار

حالت یک بعدی



$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$T(t=0) = T_i$$

$$T(x=0) = T_1$$

$$T(x=1) = T_2$$

(۳۱)

روش صریح یا Explicit

$$\frac{1}{\alpha} \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$

(۳۲)

$$T_i^{n+1} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} (T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n) + T_i^n$$

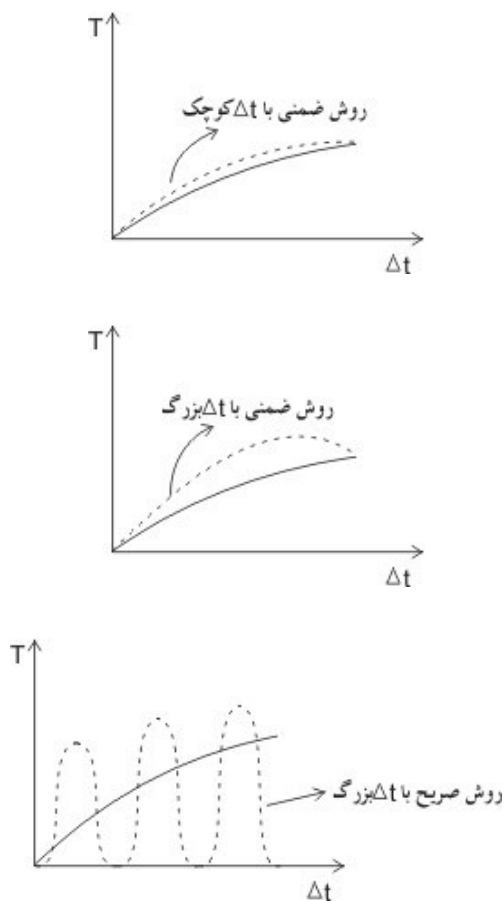
روش ضمنی یا Implicit

$$\frac{1}{\alpha} \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{(T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1})}{\Delta x^2}$$

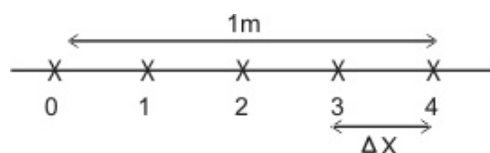
(۳۳)

روش ضمنی منجر می شود به دستگاه معادلات ماتریسی که دماها به طور همزمان بدست می آیند و نه نسبت به هم در هر قدم. خطای برش هر دو روش از مرتبه اول زمان و دوم مکان است.  
 \* روش ضمنی پایدار است یعنی اگر خطا وارد محاسبات شود این خطا میرا می شود ولی روش صریح ناپایدار است و اگر خطا وارد شود ممکن است رشد کند. برای پایداری روش صریح باید داشته باشیم:

$$\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2} \quad (34)$$



مثال:



روش صریح

$$T_i = 0$$

$$T(x=0) = 20$$

$$T(x=1) = 100$$

$$\frac{T_1^{n+1} - T_1^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_o^n - 2T_1^n + T_2^n)$$

$$n=0 \Rightarrow \frac{T_1^1 - T_i}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (20 - 2x_o + o) \Rightarrow T_1^1$$
(۳۵)

$$\frac{T_2^1 - T_2^o}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_3^o - 2T_2^o + T_i^o)$$

$$\frac{T_2^1 - 0}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (0 - 2y_o + 0) \rightarrow T_2^1$$

وقتی که دمای هر ۴ نقطه را بدست آوریم شروع به پیدا کردن ترم دوم یا زمان  $n+1$  می کنیم.

**روش ضمنی**

$$\frac{T_1^1 - T_1^o}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_o^1 - 2T_1^1 + T_2^1)$$

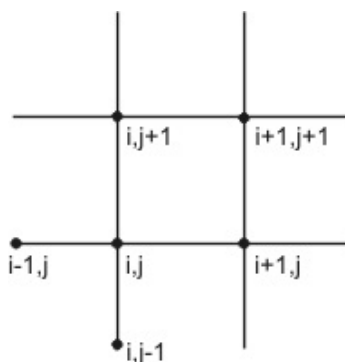
$$\frac{T_2^1 - T_2^o}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_1^1 - 2T_2^1 + T_3^1)$$

$$\frac{T_3^1 - T_3^o}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_2^1 - 2T_3^1 + T_4^1)$$
(۳۶)

با انتخاب  $\Delta t$  و  $5x$  متناسب جواب را از دستگاه معادلات ماتریس بدست می آوریم.

**حل عددی معادله انتقال حرارت ناپایدار در دو بعد**

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$
(۳۷)

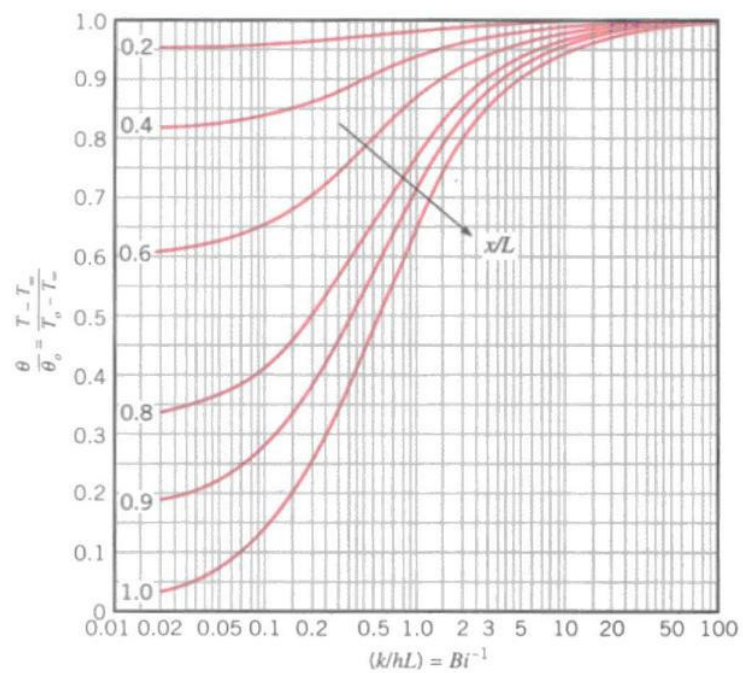
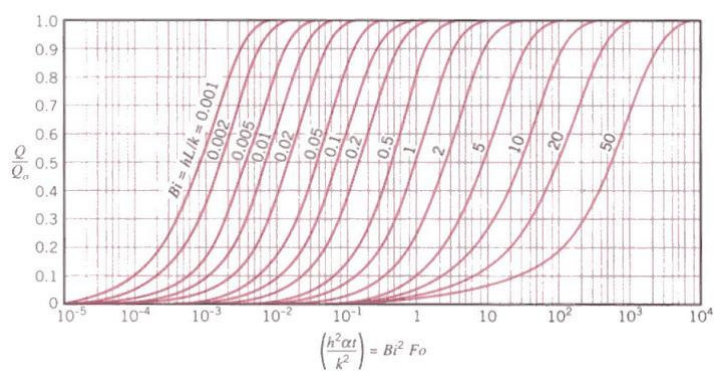
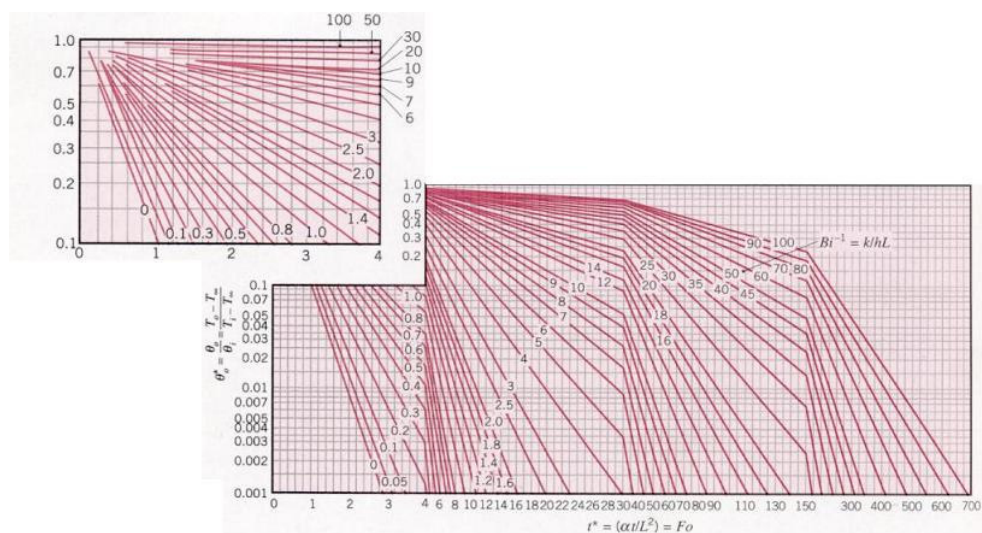


**روش صریح:**

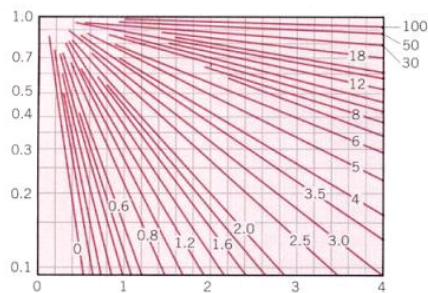
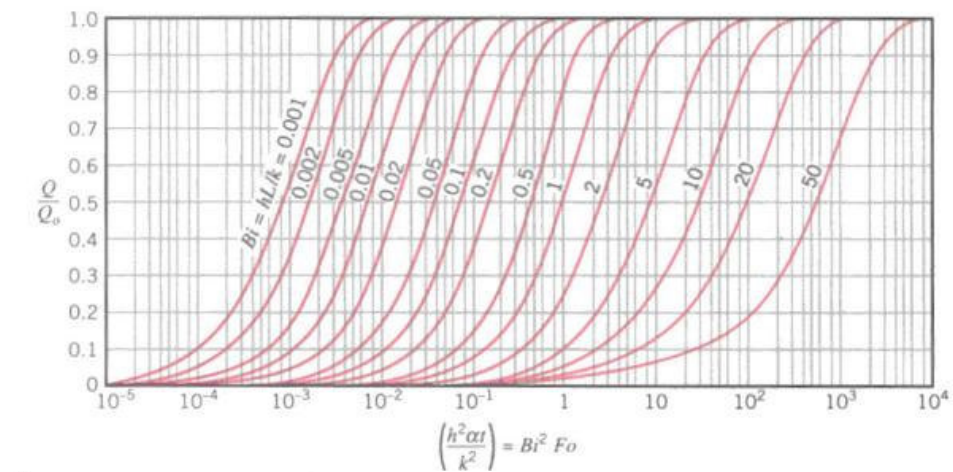
$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_{i-1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i+1,j}^n) + \frac{\alpha}{\Delta y^2} (T_{i,j-1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j+1}^n)$$
(۳۸)

$$\text{شرط پایداری } \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{4} \text{ و } \Delta y = \Delta x$$
(۳۹)

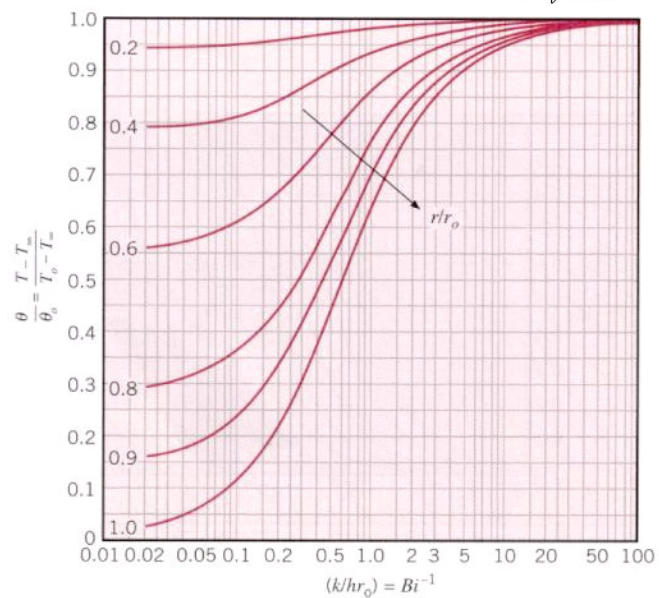
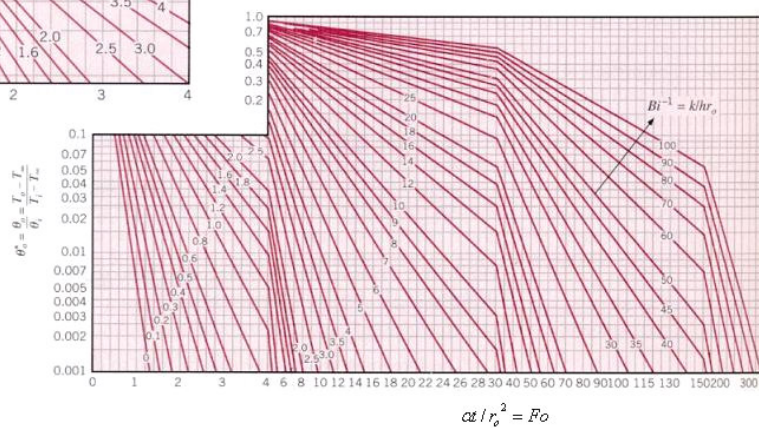
$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_{i-1,j}^{n+1} - 4T_{i,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1}) \quad (۴۰)$$



شکل منحنی‌های هایسلر برای دیوار تخت با ضخامت  $2L$  [۹]



Cylinder



شکل منحنی‌های هایسلر استوانه بی نهایت با شعاع  $r_0$  [۹]



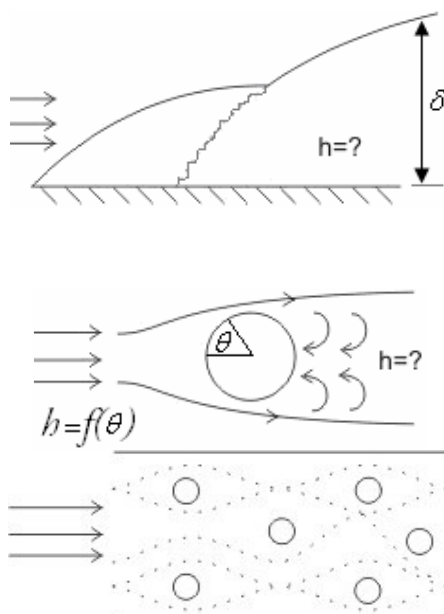
## فصل پنجم: انتقال حرارت جابجائی (جریان خارجی) Convection Heat Transfer (External Flow)

رابطه اصلی کاربردی انتقال حرارت از طریق جابجائی بصورت زیر است:

$$q = h A (T - T_{\infty})$$

$\swarrow$  سطوح تبادل حرارت       $\searrow$  ضریب انتقال حرارت جابجائی       $\swarrow$  دمای سیال به اندازه کافی دور از جداره جسم

این رابطه به قانون سرمایش نیوتن نیز معروف است.  
در این فصل تمام سعی و تلاش ما پیدا کردن تابع  $h$  می باشد.



**شکل** لایه مرزی هیدرودینامیکی در اطراف یک سطح تخت، در اطراف استوانه و مجموعه لوله‌ها  
ضریب نرخ انتقال حرارت جابجایی ( $h$ ) تابع پیچیده‌ای از محل قرارگیری لوله‌ها، قطر آن‌ها و اعداد  
بی بعد مانند  $Re$  و  $Pr$  می باشد. این مطلب در طول درس بیشتر مورد بحث قرار خواهد گرفت.

– مقایسه با مکانیک جامدات:

به طور کلی در الاستیسته داریم:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} + f_i = 0 \\ \sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + f_x = 0 \\ \sigma_{yx,x} + \sigma_{yy,y} + f_y = 0 \end{cases} \quad (1)$$



بطوریکه

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \quad (2)$$

به ترتیب تنش های نرمال در جهت  $x$  و  $y$  و تنش برشی هستند.  $f_i$  نیروی حجمی مانند جرم است.

### Closed Form Solution

در معادلات فوق برای اکثر حالات کلاسیک

روشهای دقیق قابل حل اند.

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

$\rho$  جرم مخصوص  $u, v$  مولفه های سرعت افقی و قائم،  $p$  فشار،  $\mu$  و سکوزیته دینامیک هستند. این معادلات در حالت کلی جواب بسته ندارند که علت اصلی مشکل حل این معادلات چه به صورت تحلیلی و چه به صورت روشهای عددی (کامپیوتری) وجود ترمهای غیرخطی یا به عبارت دیگر جملات جابجائی است. در حالتی که سرعت سیال خیلی ناچیز باشد (جریان سیال بسیار لزج) می توان از جملات جابجائی در مقابل جملات فشار و پخش (Diffusion) صرفنظر کرد. آنگاه معادلات راحت تر حل می شوند و می توان جواب های بسته نیز برای آن پیدا کرد. بدین منظور طی صدسال اخیر تلاش قابل توجهی جهت حل این معادلات صرف شده است همچنین بعلت نبود حل تحلیلی جامع، بسیاری از نتایج کاربردی به کمک روش های تجربی بدست آمده و در اختیار مهندسان قرار گرفته است.

معادله دیفرانسیل انتقال حرارت جابجائی بصورت زیر نوشته می شود.

$$\rho C_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

همانطور که ملاحظه می شود برای حل معادله فوق لازم است ابتدا معادلات ناویر استوکس حل شوند و میدان سرعت  $(u, v)$  تعیین گردند در این شرایط هنوز غیر خطی بودن معادلات و ناپایداری جملات جابجائی مشکل زا هستند و جواب های تحلیلی محدود و برعکس جواب های عددی نسبتا نامحدود ولی تقریبی خواهند بود. در این حالت هنوز استفاده از روش های تجربی جهت تعیین ضرایب انتقال حرارت و ضرایب اصطکاک بطور معمول بکار می رود و ساخت انواع دستگاههای اندازه گیری مانند (PIV) Particle Image Velocimetry یا (LDV) Laser Doppler Velocimetry درک عمیق تر و دقیق تری از پدیده های انتقال حرارت و انتقال ممتموم بخصوص در جریان های آشفته فراهم ساخته است. به نظر می رسد در آینده نزدیک با تلاش های محققین در حل تحلیلی، عددی و

بکار گیری روش های تجربی بیشتری از پدیده های انتقال در توربوماشین ها و سایر دستگاههای حرارتی - برودتی فراهم می یابد.

### روش های تحلیلی

#### تحلیل ابعادی معادلات لایه مرزی

#### The Laminar Boundary Layer Equations Using Scaling Principle

جریان سیال تراکم ناپذیر از روی یک صفحه تخت به طول  $L$  را در نظر بگیرید. حال معادله لایه مرزی را با استفاده از تحلیل ابعادی مورد مطالعه قرار می دهیم و تغییرات سرعت از  $u=0$  تا  $u=U_{\infty}$  و تغییرات دما را از  $T=T_0$  تا  $T=T_{\infty}$  در نظر می گیریم. در فاصله  $x$  از لبه حمله ضخامت لایه مرزی  $\delta$  است ( $\delta$  ضخامت لایه مرزی به عنوان اندازه ای است که در آن سرعت از صفر تا  $U_{\infty}$  تغییر می کند). در ناحیه به اندازه کافی دور از صفحه سرعت  $U_{\infty}$ ، دما  $T_{\infty}$ ، سرعت در جهت  $y$  صفر و فشار  $P_{\infty}$  است. در نتیجه در ناحیه نزدیک به لایه مرزی (در ناحیه ای با ارتفاع  $\delta$  از صفحه و طول  $L$ ) ابعاد (Scale) زیر برای تغییرات  $x, y$  در نظر گرفته می شود:

$$x \sim L, y \sim \delta, u \sim U_{\infty}, \quad (5)$$

به دانشجویان توصیه می شود قبل از مطالعه این بخش مباحث مربوط به مکانیک سیالات ۱ و ۲ مرور نمایند.

فرض می کنیم که مولفه های سرعت با  $U$  و گرادیان های سرعت با  $U/L$  متناسب باشند. هرگاه از تغییرات فشار صرف نظر نماییم (در مورد صفحه تخت فرض درستی است) آنگاه معادله مومنتم در جهت  $x$  بصورت زیر نمایش داده می شود:

$$\frac{U}{L} + \frac{U.U}{L} \sim v \frac{U}{L^2} \quad (6)$$

$$\frac{UL}{v} \sim 1 \quad (7)$$

$$Re_L \sim 1 \quad (8)$$

نتیجه:

برای آنکه جمله پخش  $v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  با جمله جابجایی هم مرتبه باشد لازم است که مرتبه بزرگی عدد  $Re$  حدود ۱ باشد. بنابراین برای آنکه جملات برای  $Re$  های بالا نیز هم مرتبه باشند. لازم است که طول مشخصه در جهت عمود بر جریان با  $\delta$  ضخامت لایه مرزی متناسب باشد، آنگاه می توان نتایج ذیل را گرفت

پیوستگی Continuity

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{U}{L} \approx \frac{v}{\delta} \Rightarrow v \sim \frac{U\delta}{L} \quad (10)$$

مومنتم در جهت X

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
 U \cdot \frac{U}{L} + \frac{\delta}{L} U \cdot \frac{U}{\delta} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + v \left( \frac{U}{L^2} + \frac{U}{\delta^2} \right) \\
 \frac{U^2}{L} + \frac{U^2}{L} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{vU}{\delta^2} \left( \frac{\delta^2}{L^2} + 1 \right) \quad (11) \\
 &\quad \downarrow \\
 &\quad \ll 1
 \end{aligned}$$

$$\frac{vU}{\delta^2} \sim \frac{vU}{L^2 / \text{Re}_L} \cong \frac{vU}{L^2} \text{Re}_L = \frac{vU}{L^2} \cdot \frac{UL}{v} = \frac{U^2}{L}$$

یا برعکس اگر  $\frac{\partial P}{\partial x} \sim 0$  آنگاه مرتبه بزرگی بخش و جابجائی باید برابر باشند

$$\frac{U^2}{L} \sim \frac{vU}{\delta^2} \Rightarrow \delta/L \sim 1/\sqrt{\text{Re}_L} \quad (12)$$

مومنتم در جهت y

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\
 U \cdot \frac{U\delta}{L^2} + \frac{U\delta}{L} \cdot \frac{U\delta}{L\delta} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{U\delta^2}{L} \left( \frac{U\delta}{L^2} + \frac{U\delta}{L\delta^2} \right) \\
 \frac{U^2\delta}{L^2} + \frac{U^2\delta}{L^2} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{U^2\delta}{L^2} \left( \frac{\delta^2}{L} + 1 \right) \quad (13) \\
 &\quad \downarrow \\
 &\quad \ll 1
 \end{aligned}$$

پس

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \sim \frac{U^2\delta}{L^2} \quad (14)$$

شکل

$$\begin{aligned}
 P - P_\delta &\sim \int_0^\delta \rho \frac{U^2\delta}{L^2} dy \rightarrow P \sim P_\delta + \rho \frac{U^2\delta^2}{L^2} \\
 \frac{\partial P}{\partial x} &\sim \frac{\partial P_\delta}{\partial x} + O \left[ \rho \frac{U^2\delta^2}{L^3} \right] \sim \frac{\partial P_\delta}{\partial x} + O \left[ \frac{\rho U^2}{L} \cdot \frac{\delta^2}{L^2} \right] \quad (15)
 \end{aligned}$$

ولی

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P_\delta}{\partial x} &= \frac{dP_\delta}{dx} \quad (P_\delta \text{ is independent of } y, \text{ Flow is inviscid}) \\
 \frac{\partial P}{\partial x} &\sim \frac{dP_\delta}{dx} + O \left[ \frac{\rho U^2}{L} \cdot \frac{\delta^2}{L^2} \right] \quad (16)
 \end{aligned}$$

با استفاده از نتایج بدست آمده فوق در معادله مومنتم در جهت X:

$$\frac{U^2}{L} + \frac{U^2}{L} \sim -\frac{1}{\rho} \frac{dP_\delta}{dx} - \frac{1}{\rho} \left( \rho \frac{U^2}{L} \cdot \frac{\delta^2}{L^2} \right) + \nu \frac{U}{\delta^2} \quad (17)$$

$$\frac{U^2}{L} \sim -\frac{1}{\rho} \frac{dP_\delta}{dx} - \frac{U^2}{L} \left[ \left( \frac{\delta}{L} \right)^2 \right] + \frac{\nu U}{\delta^2}$$

$\downarrow$   
 $\ll 1$

بنابراین معادله مومنتم در جهت X:

$$\rho U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} + \frac{dP}{dx} = 0 \quad (18)$$

بصورت زیر نوشته می شود:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} = U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (19)$$

مقایسه

$$\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} \sim o\left(\rho \frac{U^2}{L}\right)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} \sim o\left(\rho \frac{U^2 \delta}{L^2}\right) \quad (20)$$

$$\frac{dP/\partial y}{\partial P/\partial x} \sim o\left(\frac{U^2 \delta/L^2}{U^2/L}\right) \sim o\left(\frac{\delta}{L}\right) \ll 1$$

یا

$$\frac{\partial P}{\partial y} \ll \frac{\partial P}{\partial x} \quad (21)$$

مومنتم در جهت Y

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (22)$$

معادله انرژی Energy Equation

$$\rho C_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + \nu \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \beta T \left( u \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \phi \quad (23)$$

اکنون به بررسی مرتبه بزرگی جملات می پردازیم:

$$\rho C_p T \left( \frac{U}{L} + \frac{\delta U}{L \delta} \right) \sim k T \left( \frac{1}{L^2} + \frac{1}{\delta^2} \right) + \beta T \left( U_o \rho \frac{U_o^2}{L} + \frac{\delta U}{L} \rho \frac{\delta}{L^2} U^2 + \phi \right) \quad (24)$$

فرض می کنیم ضخامت لایه مرزی حرارتی و هیدرودینامیکی هم مرتبه باشند (در بخش بعدی در این مورد بیشتر توضیح داده می شود) داریم:

$$\frac{U}{L} + \frac{U}{L} \sim \frac{k}{\rho C_p} \left( \frac{1}{L^2} + \frac{1}{\delta^2} \right) + \frac{\beta}{C_p} \frac{U^3}{L} \left( 1 + \frac{\delta^2}{L^2} \right) + \phi / \rho C_p T \quad (25)$$

$\ll 1$        $\ll 1$

$$\phi = \mu \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \right] + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \phi &\sim \mu \left[ \left( \frac{U}{L} \right)^2 + \left( \frac{\delta U}{L} \right)^2 + \left( \frac{U}{L} + \frac{U\delta}{L^2} \right)^2 \right] \\ &\sim \mu \left[ \frac{U^2}{L^2} + \frac{U^2}{\delta^2} + \frac{U^2 \delta^2}{L^4} + 2 \frac{U^2}{L^2} \right] \sim \mu \frac{U^2}{\delta^2} \\ \mu \frac{U^2}{\delta^2} &= \rho v \frac{U^2}{\delta^2} \sim \rho \frac{v U^2}{v L / U} \sim \frac{\rho U^3}{L} \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\rho C_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \beta T u \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (27)$$

در عبارت فوق از ترم a صرف نظر می کنیم وقتی که داشته باشیم:

$$\frac{\phi}{Inertia} \sim \frac{\rho u^3 / L}{\rho C_p T U / L} = \frac{U^2}{C_p T} \quad \text{if } Ec = \frac{U^2}{C_p T} \ll 1 \quad (28)$$

ترم (a) زمانی قابل صرف نظر کردن است که  $Ec \ll 1$  باشد در مورد ترم (b) می توان نوشت:

$$\frac{\phi}{pressure term} \sim \frac{\rho U^3 / L}{\rho \beta T U^3 / L} = \frac{1}{\beta T} \quad (29)$$

برای گاز ایده آل

$$\frac{1}{\beta T} \sim o(1), \beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = -\frac{1}{T} \quad (30)$$

برای مایعات (مانند آب)

$$\beta T \sim 0.05 \Rightarrow \phi \gg pressure term \quad (40)$$

به هر حال چنانچه از  $\phi$  صرف نظر کنیم ترم فشار نیز صرف نظر خواهد شد. که در این صورت معادله انرژی بصورت زیر ساده می شود:

$$\rho C_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (41)$$

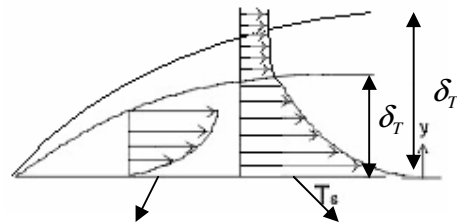
### فرضیه لایه مرزی Thermal Boundary Layer Assumption

$$q = hA(T_s - T_\infty)$$

در این رابطه  $T_s$  دمای سطح،  $T_\infty$  دمای سیال به اندازه کافی دور از جسم می باشد همانگونه که قبلا نیز اشاره شد در نزدیکی جسم انتقال حرارت تنها از طریق هدایت انجام می گیرد، بنابراین:

$$q = -kA \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

ضریب هدایت حرارت سیال ↗



توزیع دما در لایه مرزی حرارتی      توزیع سرعت در لایه مرزی هیدرودینامیکی

شکل لایه مرزی بر روی یک سطح تخت

با ترکیب دو معادله فوق خواهیم داشت:

$$h = \frac{-k \frac{\partial T}{\partial y} \big|_{y=0}}{T_s - T_\infty} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = ? \quad \text{برای محاسبه } h \text{ باید معلوم کنیم}$$

$$T = f(y) = ? \quad \text{یا}$$

Local Heat Transfer Coefficient  $\frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$ : ضریب انتقال حرارت جابجائی موضعی:  $h$

و  $\bar{h}$  ضریب انتقال حرارت متوسط است که برای صفحه تخت بصورت زیر تعریف می شود:

$$\bar{h} = \frac{\int_0^x h dA}{\int_0^x dA} = \frac{\int_0^x h \times (1) \times dx}{\int_0^x (1) \times dx}$$

برای صفحه تخت به عرض واحد

مثال: اگر ضریب انتقال حرارت جابجائی موضعی به صورت زیر باشد  $\bar{h}$  را محاسبه نمایید.

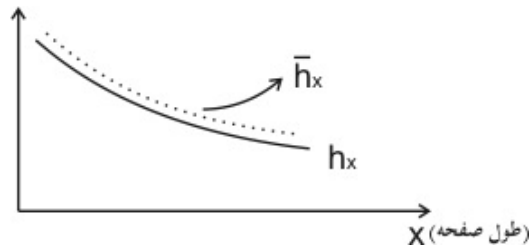
$$h_x(x) = ax^{0.1}$$

$$\bar{h}_x = \frac{1}{x} \int_0^x h_x(x) dx \rightarrow h_x(x) = ax^{0.1}$$

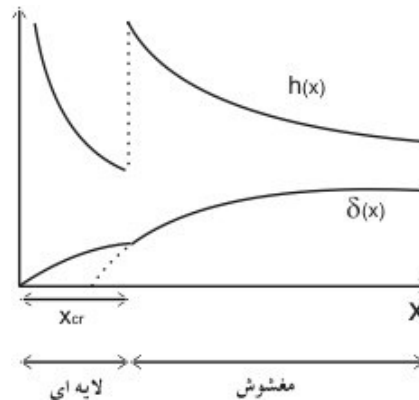
$$\Rightarrow \bar{h}(x) = \frac{1}{x} \int_0^x ax^{0.1} dx = \frac{a}{x} \int_0^x x^{0.1} dx = 1/11 ax^{0.1}$$

$$\Rightarrow \bar{h}(x) = 1.1 h_x$$

ملاحظه می شود که تغییرات  $h_x$  و  $\bar{h}_x$  به صورت زیر خواهد بود.



- مقایسه تغییرات لایه مرزی سرعت و ضریب انتقال حرارت جابجائی در طول یک صفحه:



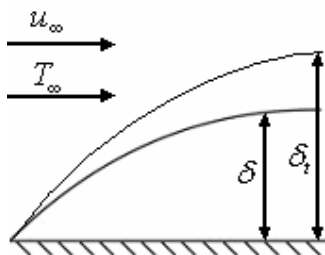
### معادلات لایه مرزی و تشابه رینولدز - کولبورن (Colburn-Reynolds Analogy)

در بخش‌های قبلی معادلات لایه مرزی حرارتی و هیدرودینامیکی را بدست آوردیم. ملاحظه می‌کنید که حل این معادلات نسبتاً آسان‌تر از حل معادلات کامل ناویر-استوکس است. بنابراین می‌توان در شرایط خاص حل بسته (Closed Form) نیز بدست آورد. برای مثال حل بلازیوس Blasius یکی از روش‌های کلاسیک در این مورد است که با فرض تشابه توزیع سرعت نسبت به متغیر تشابه‌ی  $y/\delta$  می‌توان معادلات دیفرانسیل مشتقات جزئی لایه مرزی را بصورت معادله دیفرانسیل معمولی نوشت و براحتی حل نمود. البته در این جزوه حل تشابه‌ی بلازیوس مورد بحث قرار نخواهد گرفت.

روش دیگری که برای تعیین ضریب اصطکاک و ضریب انتقال حرارت بکار می‌رود روش فون-کارمن Von-Karman است که بصورت انتگرال‌گیری از معادلات در فاصله  $y=0$  تا  $y=\delta$  و فرض توزیع چند جمله‌ای برای سرعت و دما می‌باشد. خواننده می‌تواند با مراجعه به کتب سیالات یا انتقال حرارت روش‌های ریاضی فوق‌الذکر را مورد مطالعه قرار دهد.

یکی از نکات جالب توجه در مبحث انتقال حرارت جابجایی تشابه بین دو مکانیزم انتقال مومنتم و انتقال حرارت می‌باشد. به عبارت دیگر همانگونه که از نظر فیزیکی و درک شهودی می‌توان انتقال

مومنتم و انتقال حرارت را در جریان آرام و متلاطم بطور مشابه تفسیر کرد از نظر ریاضی نیز معادلات مشابه هم برای دو نوع انتقال بدست می‌آیند.



شکل لایه مرزی حرارتی و هیدرودینامیکی

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (42)$$

فرض:  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ ، در مورد صفحه تخت فرض درستی است.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cong \frac{V^2}{\delta^2} \gg \frac{V^2}{L^2} \cong \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (43)$$

معادله لایه مرزی هیدرودینامیکی:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (44)$$

معادله لایه مرزی حرارتی:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (45)$$

ابتدا معادلات را بی بعد می کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} U^* &= \frac{U}{V} & T^* &= \frac{T - T_\infty}{T_s - T_\infty} & y^* &= \frac{y}{l} \\ V^* &= \frac{v}{V} & P^* &= \frac{P}{\rho V^2} & x^* &= \frac{x}{l} \end{aligned} \quad (46)$$

معادله بی بعد شده حاصل می شود:

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y} = \text{Pr} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} \quad (47)$$

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} \quad \text{عدد پرانتل} \quad (48)$$

عدد پرانتل از نظر فیزیکی نسبت پخش مومنتم  $\nu$  به پخش حرارت می باشد. هرگاه  $\text{Pr}=1$  باشد در آنصورت بدیهی است که ضخامت لایه مرزی حرارتی و هیدرودینامیکی برابر خواهند شد. البته از نظر ریاضی با حل تشابهی یا انتگرالی می توان نشان داد که  $\frac{\delta}{\delta_t} = \text{Pr}^{\frac{1}{3}}$  اکنون با توجه به معادله (44) و

(47) می توان توابع زیر را برای توزیع سرعت و دما فرض کرد:



$$U^* = f_1(x^*, y^*, \text{Re}) \quad (49)$$

$$T^* = f_2(x^*, y^*, \text{Re}, \text{Pr})$$

از تعریف تنش برشی داریم:

$$\tau \Big|_{y=0} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \mu \frac{\partial u^* V}{\rho \partial y^*} = \frac{\mu V}{L} f_3(x^*, \text{Re})$$

$$C_f = \frac{\tau}{\frac{1}{2} \rho V^2} = \frac{\mu V}{\frac{1}{2} \rho V^2 L} f_3(x^*, \text{Re}) \quad (50)$$

$$\frac{C_f}{2} = \frac{1}{\text{Re}} f_3(x^*, y^*, \text{Re})$$

طبق تعریف شار حرارتی عبارتست از:

$$q \Big|_{y=0} = -k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{-k(T_s - T_\infty)}{L} \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \quad (51)$$

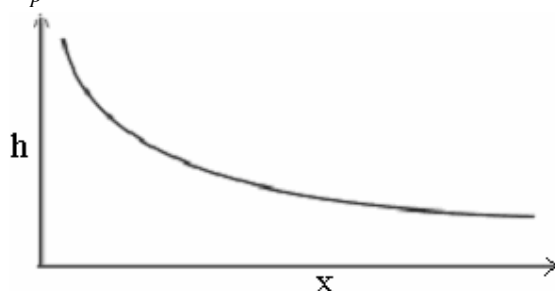
$$h = \frac{q}{T_s - T_\infty} = \frac{-k(T_\infty - T_s)}{L(T_s - T_\infty)} f_4(x^*, \text{Re}, \text{Pr}) \quad (52)$$

عدد بی بعد ناسلت بصورت زیر تعریف می شود:

$$Nu = \frac{hL}{K} = f_4(x^*, \text{Re}, \text{Pr}) \quad (53)$$

اکنون ملاحظه می گردد که هرگاه عدد  $\text{Pr}=1$  باشد آنگاه بدلیل تشابه معادلات ۴۴ و ۴۷ شکل توابع  $f_3$  و  $f_4$  نیز مشابه خواهد بود. در نتیجه ضریب اصطکاک و ضریب انتقال حرارت مشابه خواهند بود. عدد بی بعد استانتون را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$St = \frac{Nu}{\text{Re Pr}} = \frac{h}{\rho V C_p} \rightarrow \frac{C_f}{2} \quad (54)$$



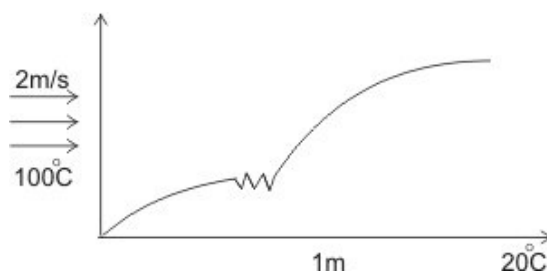
شکل توزیع ضریب انتقال حرارت بر روی سطح تخت

رابطه (۵۳) اهمیت ویژه ای دارد و بیانگر آنست که برای بدست آوردن ضریب انتقال حرارت جابجایی از روش تجربی یا تئوری به جای هفت پارامتر اصلی  $(h, k, C_p, \rho, \mu, L, U_\infty)$  تنها از سه گروه بی بعد  $\text{Re}$ ,  $\text{Pr}$ ,  $Nu$  می توان استفاده نمود. اهمیت رابطه (۵۴):

رابطه (۵۴) تشابه رینولدز نام دارد. توجه دارید که رابطه بین میدان سرعت و انتقال حرارت رابطه برقرار می‌نماید. البته این رابطه در شرایط  $Pr=1$  و  $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$  بدست آمده‌است، با این وجود می‌توان نشان داد از این رابطه می‌توان برای طیف وسیعی از اعداد  $Pr$  می‌توان استفاده نمود [۹] و در نهایت رابطه بصورت زیر کامل می‌شود:

$$\frac{C_f}{2} = St Pr^{\frac{2}{3}} \quad 0.6 < Pr < 60 \quad (55)$$

**نکته:** در جریان آشفته روی صفحه تخت گرادیان فشار نقش کمتری دارد و معادله (۵۵) در این حالت نیز بصورت تقریبی صادق خواهد بود.  
**مثال:** در شکل روبرو  $h_x$  و  $\bar{h}_x$  و  $q$  را به دست آورید.



$$Re_x = \frac{\rho V x}{\mu} < 5 \times 10^5$$

از جدول صفحه ۸۲ داریم:

$$0.332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3} = Nu_x$$

$$Nu_x = \frac{h_x L}{k} \xrightarrow{\text{معلوم}} h_x \rightarrow \text{برای هر } x \text{ معلوم}$$

$$q = \bar{h}(T_\infty - T_s)$$

$$h_x = 0.664 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}$$

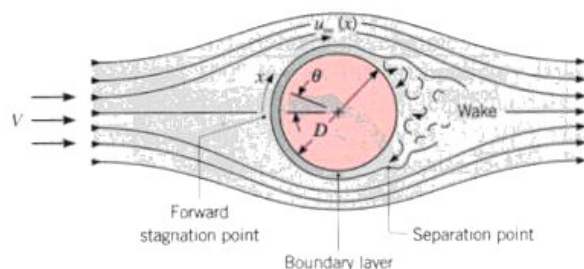
$$\Rightarrow q = h_x(T_\infty - T_s) = h_x(100 - 20)$$

به ازاء واحد سطح

جریان از روی هندسه‌های مختلف

برای جریان سیال از روی هندسه‌های مختلف باید از فرمول‌های تجربی پیشنهاد شده توسط محققان مختلف سود جست. برای مثال برای استوانه  $Nu$  برحسب رینولدز تعریف می‌شود. در زیر رابطه تجربی هلیپرت را برای جریان از روی استوانه ارائه شده‌است.

$$\begin{cases} Nu = \frac{hD}{k} \\ Re = \frac{\rho V D}{\mu} \end{cases} \quad (۱۷)$$



شکل جریان از روی استوانه [۹]

رابطه تجربی هلیپرت






$$\bar{Nu}_D = \frac{\bar{h}D}{K} = C Re_D^m Pr^{1/3} \rightarrow \text{تمام خواص در دمای } \bar{Nu}_D = \frac{\bar{h}D}{K} \text{ فیلم سیال است.}$$

**جدول** مقادیر رابطه هیلبرت برای مقطع دایروی به ازای اعداد مختلف رینولدز

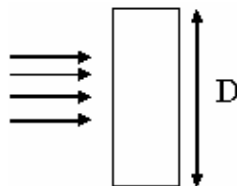
$Re_D$	$c$	$m$
0.4-4	0.989	0.330
4-40	0.911	0.385
40-4000	0.683	0.465
4000-40000	0.193	0.618
40000- $4 \times 10^5$	0.027	0.805

توجه شود که اعداد ارائه شده در جدول فوق تنها برای جریان از روی استوانه‌های با مقطع دایره‌ای صادق است و برای هندسه‌های مختلف (مقطع شش‌ضلعی، مثلثی و ...) باید از جداول ویژه این مقاطع استفاده نمود.

**جدول** مقادیر عدد هیلبرت برای مقاطع مختلف

Geometry	$Re_D$	$C$	$m$
Square 	$5 \times 10^3 - 10^5$	0.246	0.588
	$5 \times 10^3 - 10^5$	0.102	0.675
Hexagon 	$5 \times 10^3 - 1.95 \times 10^4$ $1.95 \times 10^4 - 10^5$	0.160 0.0385	0.638 0.782
	$5 \times 10^3 - 10^5$	0.153	0.638
Vertical plate 	$4 \times 10^3 - 1.5 \times 10^4$	0.228	0.731

مثال: جریان هوا از روی صفحه تختی با مشخصات زیر عبور می‌کند. نرخ انتقال حرارت از روی این استوانه را بیابید.



$$Re_D \rightarrow 9 \times 10^3 - 1.5 \times 10^5$$

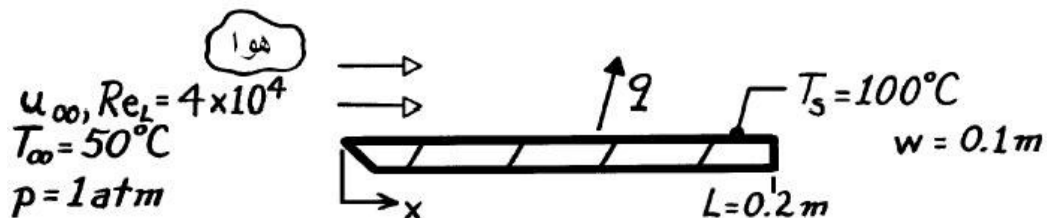
$$C = 0.228$$

$$m = 0.731$$

#### توجه:

روابط گوناگونی (تجربی) برای پیدا کردن  $\bar{Nu}$  حول استوانه و کره موجود می‌باشد که دقت آن‌ها متفاوت است. اینک با ذکر سه مثال به تکمیل مبحث انتقال حرارت جابجائی در جریان خارجی می‌پردازیم:

(۱) هوا در فشار 1 atm و دمای  $50^\circ\text{C}$  به طور موازی روی یک سطح ورق تختی که دمای آن  $100^\circ\text{C}$  است جریان دارد. طول صفحه  $0.2\text{m}$  و پهنای آن  $0.1\text{m}$  است عدد رینولدز بر مبنای طول صفحه  $4 \times 10^4$  است. نرخ انتقال گرما از صفحه به هوا چقدر است؟ اگر سرعت جریان آزاد هوا دو برابر و فشار آن 10 atm شود، نرخ انتقال گرما چقدر خواهد شد؟



حل:

طبق جدول انتهایی کتاب:

$$T_f = 384^\circ K \mid p = 1 \text{ atm} \rightarrow k = 0.0299 \frac{m}{m.k} \text{ و } pr = 0.7$$

$$q = \bar{h}_L (w \times L) (T_s - T_\infty)$$

$$\bar{Nu} = \frac{\bar{h}_L L}{K} = 0.664 \text{Re}_L^{0.5} pr^{0.33} = 118$$

$$\bar{h}_L = 118 \frac{k}{L} = 118 \times \frac{0.0299}{0.2} = 17.6 \Rightarrow q = 17.6 \times (0.02) \times (100 - 50) = 17.6$$

در قسمت دوم فشار ۱۰ اتمسفر شده است پس:

$$\rho_2 = 10\rho_1 \Rightarrow v_2 = 0.1 \times v_1$$

$$\text{Re}_{L,2} = \frac{UL}{\nu} = 2 \times 10 \times \left(\frac{UL}{\nu}\right)_1 = 20\text{Re}_1 = 8 \times 10^5$$

عدد رینولدز زیاد شده است و از مرز  $5 \times 10^5$  گذشته است پس جریان مغشوش خواهد شد و باید از

معادلات تجربی لایه مرزی مرکب استفاده نمود:

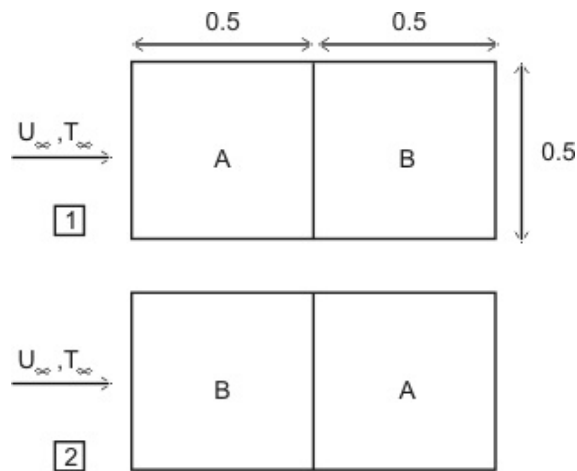
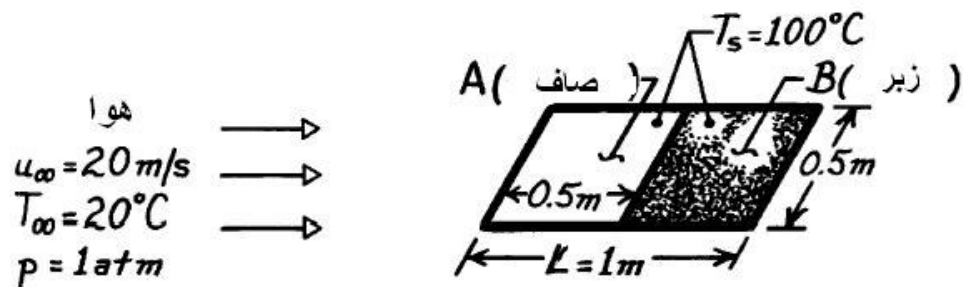
$$\bar{Nu} = \frac{\bar{h}_L L}{k} = (0.037 \text{Re}_L^{0.8} - 871) \text{Pr}^{1/3} = [0.037(8 \times 10^5)^{0.8} - 871] \times (0.7)^{1/3}$$

$$\bar{Nu} = 961 \times \frac{0.0299}{0.2} = 143.6$$

$$q = 143.6 \times (90.1 \times 0.2) (100 - 50) = 143.6$$

پس انتقال حرارت جابجائی بسیار زیادتر خواهد شد.

۲) سطح بالای یک محفظه گرم از یک بخش صاف (A) و یک بخش کاملاً ناصاف (B) تشکیل شده است این سطح در معرض جریان هوای محیط قرار دارد.



در کدامیک از حالات ۱ و ۲ مقدار انتقال حرارت جابجائی کمتر است؟ اگر  $T_s = 100^{\circ}$  و  $T_{\infty} = 20^{\circ}$  و  $U_{\infty} = 0.20 \text{ m/s}$  باشد نرخ انتقال حرارت جابجائی در هر حالت چقدر است؟

**حل:**

**طبق جدول انتهایی کتاب مرجع ۹:**

از آنجائی که در وضعیت ۲ جریان روی صفحه از همان ابتدا مغشوش خواهد شد انتقال حرارت کمتر در حالت ۱ بوجود می آید. ولی برای محاسبه مقدار آن به طریق زیر عمل می کنیم:

$$\text{Re}_L = \frac{U_{\infty} L}{\nu} = \frac{20}{19.2 \times 10^{-6}} = 1.09 \times 10^6 \rightarrow$$

$$\text{Re}_x = 5 \times 10^5 \rightarrow x_c = 0.48 \leftarrow$$

قبل از رسیدن به منطقه زبری در حالت اول

$$\bar{Nu}_{2,1} = [0.037(1.09 \times 10^6)^{0.8} - 871](0.7)^{0.33} = 1366$$

$$\bar{Nu}_{1,2} = [0.037(1.09 \times 10^6)^{0.8}](0.7)^{0.33} = 2140$$

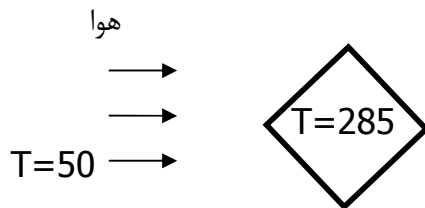
$$\Rightarrow \bar{Nu}_2 > \bar{Nu}_1 \Rightarrow q_1 < q_2$$

$$\bar{h}_1 = 1366 \frac{(28.7 \times 10^{-3})}{1} = 39.2$$

$$q_1 = \bar{h}_1 \times A(T_s - T_\infty) = 39.2 \times (0.5 \times 1)(100 - 20)$$

$$q_1 = 1568 W$$

۳) شمش مکعب مستطیلی به ضلع  $10\text{cm}$  پس از بیرون آوردن از کوره باز پخت با دمای  $285^\circ\text{C}$  در جریان هوای خنک کننده ای با دمای متوسط  $50^\circ\text{C}$  قرار می گیرد، میزان انتقال حرارت در لحظه ی خروج از کوره چقدر است؟ (فرض کنید فن باد را با سرعت  $2\frac{m}{s}$  بدمد).



حل:

$$D = \sqrt{(0.1)^2 + (0.1)^2} = \sqrt{0.2}$$

عدد رینولدز را محاسبه میکنیم:

$$Re = \frac{U_\infty D}{\nu} = \frac{2 \times \sqrt{0.2}}{18 \times 10^{-6}} = 49688.8$$

$$\Rightarrow C = 0.246, m = 0.588$$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{18 \times 10^{-6}}{27 \times 10^{-6}} = 0.66 \quad \text{طبق جدول خواص:}$$

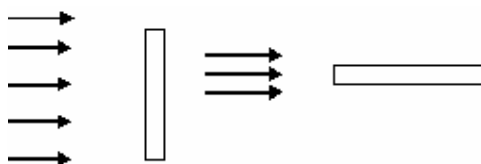
$$k = 27.2 \times 10^{-3}$$

$$\Rightarrow \bar{Nu}_D = \frac{\bar{h}D}{K} = C Re_D^m Pr^{1/3} \rightarrow 0.246 \times (49688.8)^{0.588} \times (0.66)^{1/3} = 123.64$$

$$\rightarrow \bar{h} = \bar{Nu} \times \frac{k}{D} = 123.64 \times \frac{27.2 \times 10^{-3}}{\sqrt{0.2}} = 7.52$$

$$\rightarrow q'' = \bar{h} \times (T_s - T_\infty) = 7.52 \times (285 - 50) = 1767.2 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$$

**مسئله :** با استفاده از روابط تجربی و تئوری انتقال حرارت را برای صفحه ای به طول ۱ متر و عرض بی نهایت در دو حالت عمودی و افقی که وزش باد روی آن با سرعت ۱ متر بر ثانیه میباشد ، مقایسه کنید.(سپس با فرض دما برای هوا و صفحه نتیجه خود را تائید کنید)





**جدول** خلاصه‌ای از روابط تجربی برای محاسبه ضرایب اصطکاک و انتقال حرارت در جریان بر روی صفحات تخت با زاویه حمله صفر [۹]

Coefficient	Equation	Conditions
LAMINAR FLOW		
Local friction coefficient	$C_{fx} = 0.664 \text{Re}_x^{-0.5}$	$\text{Re}_x < 5 \times 10^5$
Local Nusselt number at distance $x$ from leading edge	$\text{Nu}_x = 0.332 \text{Re}_x^{0.5} \text{Pr}^{0.33}$	$\text{Pr} > 0.1, \text{Re}_x < 5 \times 10^5$
	$\text{Nu}_x = 0.565 (\text{Re}_x \text{Pr})^{0.5}$	$\text{Pr} < 0.1, \text{Re}_x < 5 \times 10^5$
Local Sherwood number	$\text{Sh}_x = 0.332 \text{Re}_x^{0.5} \text{Sc}^{0.3}$	$\text{Sc} > 0.1, \text{Re}_x < 5 \times 10^5$
Average friction coefficient	$C_f = 1.33 \text{Re}_L^{-0.5}$	$\text{Re}_L < 5 \times 10^5$
Average Nusselt number between $x = 0$ and $x = L$	$\bar{\text{Nu}}_L = 0.664 \text{Re}_L^{0.5} \text{Pr}^{0.33}$	$\text{Pr} < 0.1, \text{Re}_L < 5 \times 10^5$
	$\bar{\text{Sh}}_L = 0.664 \text{Re}_L^{0.5} \text{Sc}^{0.33}$	$\text{Sc} > 0.1, \text{Re}_L < 5 \times 10^5$
TURBULENT FLOW		
Local friction coefficient	$C_{fx} = 0.0576 \text{Re}_x^{-0.2}$	$\text{Re}_x > 5 \times 10^5, \text{Pr} > 0.5$
Local Nusselt number at distance $x$ from leading edge	$\text{Nu}_x = 0.0288 \text{Re}_x^{0.8} \text{Pr}^{0.33}$	
Local Sherwood number	$\text{Sh}_x = 0.0288 \text{Re}_x^{0.8} \text{Sc}^{0.33}$	$\text{Re}_x > 5 \times 10^5, \text{Sc} > 0.5$
Average friction coefficient	$\bar{C}_f = 0.072 [\text{Re}_L^{-0.2} - 0.0464(x_{cr}/L)]$	$\text{Re}_L > 5 \times 10^5, \text{Pr} > 0.5$
Average Nusselt number between $x = 0$ and $x = L$ with transition at $\text{Re}_{x,cr} = 5 \times 10^5$	$\bar{\text{Nu}}_L = 0.036 \text{Pr}^{0.33} [\text{Re}_L^{0.8} - 23,200]$	
Average Sherwood number	$\bar{\text{Sh}}_L = 0.036 \text{Sc}^{0.33} [\text{Re}_L^{0.8} - 23,200]$	$\text{Re}_L > 5 \times 10^5, \text{Sc} > 0.5$

\* Applicable to low-speed flow (Mach number  $< 0.5$ ) of gases and liquids with all physical properties at the mean film temperature.  $T_f = (T_s + T_\infty)/2$ .

$$\begin{array}{lll}
 C_{fx} = \tau_x / (\rho u_\infty^2 / 2g_c) & \bar{C}_f = (1/L) \int_0^L C_{fx} dx & \text{Pr} = c_p \mu / k \\
 \text{Nu}_x = h_c x / k & \bar{\text{Nu}} = \bar{h}_t L / k & \bar{h}_t = (1/L) \int_0^L h_t(x) dx \\
 \text{Re}_x = \rho u_\infty x / \mu & \text{Re}_L = \rho u_\infty L / \mu & \text{Sc} = \nu / D_{AB} \\
 \text{Sh}_x = h_m x / D_{AB} & \bar{\text{Sh}} = \bar{h}_m L / D_{AB} & \bar{h}_m = (1/L) \int_0^L h_m(x) dx
 \end{array}$$

Geometry	Correlation equation	Restrictions
Long circular cylinder in a gas or a liquid	$\overline{Nu}_D = C Re_D^m Pr^n (Pr/Pr_s)^{1/4}$ (see Table 7.1)	$1 < Re_D < 10^6$
Noncircular cylinder in a gas	$\overline{Nu}_D = B Re_D^n$ (see Table 7.2)	$2500 < Re_D < 10^5$
Circular cylinder in a liquid metal	$\overline{Nu}_D = 1.125(Re_D Pr)^{0.413}$	$1 < Re_D Pr < 100$
Short cylinder in a gas	$\overline{Nu}_D = 0.123 Re_D^{0.651} + (D/L)^{0.85} Re_D^{0.792}$	$7 \times 10^4 < Re_D < 1.1 \times 10^5$ $L/D < 4$
Sphere in a gas	$\frac{h_c}{c_p U_\infty} = (2.2/Re_D + 0.48/Re_D^{0.5})$ $\overline{Nu}_D = 0.37 Re_D^{0.6}$ $\overline{Nu}_D = 430 + 5 \times 10^{-8} Re_D + 0.25 \times 10^{-9} Re_D^2 - 3.1 \times 10^{-17} Re_D^3$ $\overline{Nu}_D = 2 + (0.4 Re_D^{1/2} + 0.06 Re_D^{2/3}) Pr^{0.4} (\mu/\mu_s)^{1/4}$	$1 < Re_D < 25$ $25 < Re_D < 10^5$ $4 \times 10^5 < Re_D < 5 \times 10^6$ $3.5 < Re_D < 7.6 \times 10^4$ $0.7 < Pr < 380$
Sphere in a liquid metal	$\overline{Nu}_D = 2 + 0.386(Re_D Pr)^{1/2}$	$3.6 \times 10^4 < Re_D < 2 \times 10^5$
Long flat plate, width $D$ , perpendicular to flow in a gas	$\overline{Nu}_D = 0.20 Re_D^{2/3}$	$1 < Re_D < 4 \times 10^5$
Half-round cylinder with flat rear surface in a gas	$\overline{Nu}_D = 0.16 Re_D^{2/3}$	$1 < Re_D < 4 \times 10^5$
Square plate, dimension, $L$ , perpendicular to flow of a gas or a liquid	$(\overline{h}_D/c_p U_\infty) Pr^{2/3} = 0.930 Re_L^{-1/2}$	$2 \times 10^4 < Re_L < 10^5$
Packed bed—heat transfer to or from packing, in a gas	$\overline{Nu}_{D_p} = \frac{1-\epsilon}{\epsilon} (0.5 Re_{D_p}^{1/2} + 0.2 Re_{D_p}^{2/3}) Pr^{1/3}$ ( $\epsilon$ = porosity of bed)	$20 < Re_{D_p} < 10^4$ $0.34 < \epsilon < 0.78$

ادامه دارد

Geometry	Correlation equation	Restrictions
( $\epsilon$ = void fraction) ( $D_p$ = equivalent packing diameter, see Eq. 7.16)	$\frac{(h_d/c_p U_p) Pr^{2/3}}{\epsilon} = \frac{1.075}{\epsilon} Re_{D_p}^{-0.826}$	$0.01 < Re_{D_p} < 10$
Packed bed— heat transfer to or from containment wall, gas	$\overline{Nu}_{D_p} = 2.58 Re_{D_p}^{1/3} Pr^{1/3} + 0.094 Re_{D_p}^{0.8} Pr^{0.4}$	$40 < Re_{D_p} < 2000$ cylinder-like packing
	$\overline{Nu}_{D_p} = 0.203 Re_{D_p}^{1/3} Pr^{1/3} + 0.220 Re_{D_p}^{0.8} Pr^{0.4}$	$40 < Re_{D_p} < 2000$ sphere-like packing
Tube bundle in cross-flow (see Figs. 7.17 and 7.18)	$\overline{Nu}_D Pr^{-0.36} (Pr/Pr_s)^{-0.25} = C (S_T/S_L)^n Re_D^m$	
	$\begin{array}{ccc} C & m & n \\ 0.8 & 0.4 & 0 \\ 0.9 & 0.4 & 0 \\ 0.27 & 0.63 & 0 \end{array}$	$10 < Re_D < 100$ , in-line $10 < Re_D < 100$ , staggered $1000 < Re_D < 2 \times 10^5$ , in-line $S_T/S_L \geq 0.7$
	$\begin{array}{ccc} 0.35 & 0.60 & 0.2 \\ 0.40 & 0.60 & 0 \end{array}$	$1000 < Re_D < 2 \times 10^5$ , staggered $S_T/S_L < 2$ $1000 < Re_D < 2 \times 10^5$ , staggered $S_T/S_L \geq 2$
	$\begin{array}{ccc} 0.021 & 0.84 & 0 \\ 0.022 & 0.84 & 0 \end{array}$	$Re_D > 2 \times 10^5$ , in-line $Re_D > 2 \times 10^5$ , staggered $Pr > 1$
	$\overline{Nu}_D = 0.019 Re_D^{0.84}$	$Re_D > 2 \times 10^5$ , staggered $Pr = 0.7$
	$\overline{Nu}_D = 4.03 + 0.228(Re_D Pr)^{2/3}$	$2 \times 10^4 < Re_D < 8 \times 10^4$ , staggered liquid metals

## فصل ششم:

### انتقال حرارت جابجائی (جریان‌های داخلی)

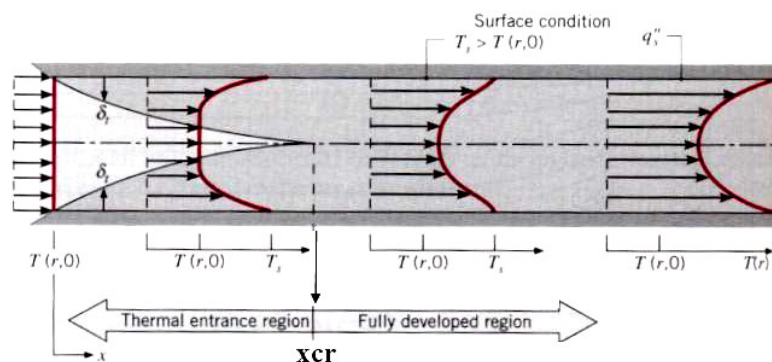
### Convection Heat Transfer (Internal Flow)

ضریب انتقال حرارت جابجائی بین جدار لوله و سیال مطلوب است.

نوع رژیم ←  
 Laminar آرام  
 Turbulent مغشوش

انواع شرایط مرزی ←  
 شار حرارتی ثابت  $q'' = cte$   
 دمای جداره ثابت  $T_w = T_s = cte$   
 حالت عمومی از شرایط مرزی  
 $q'' = q''(x)$  یا  $T_w = f(x)$

بررسی :  
 (۱) در ناحیه ورودی لوله Entrance  
 (۲) میدان جریان در فاصله دور از ورودی لوله (توسعه یافته) Fully Developed



شکل جریان داخلی (توزیع دمای توسعه یافته و توزیع دمای ورودی)

در ناحیه گسترش یافته داریم:

سرعت:

در لوله

$$u = 2u_{av} \left( 1 - \frac{r^2}{r_o^2} \right) \quad (1)$$

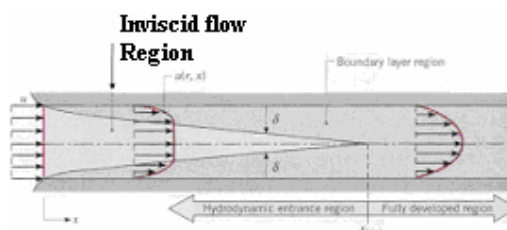
برای جریان  
بین دو صفحه

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \rightarrow u = u_{av} \left( 1 - \frac{y^2}{L^2} \right)$$

در جریان توسعه هیدرودینامیکی:

$$\frac{u}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (2)$$

$$\text{شرایط توسعه یافتگی} \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ v = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x} = \text{const} \end{cases} \quad (3)$$



تعریف دمای متوسط حجمی یا Bulk Mean Temp

$$T_m = \frac{\int \rho u c T dA}{\int \rho u c dA} = \frac{\int u T dA}{V_{av} A} = f(x)$$

$$\frac{T_w - T}{T_w - T_m} \neq f(x) \rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{T_w - T}{T_w - T_m} \right)_{r=r_o} = - \frac{\frac{\partial T}{\partial r} \big|_{r=r_o}}{T_w - T_m} = \text{const} \quad (4)$$

$$q'' = h(T_w - T_m) \text{ و } q'' = -k \frac{\partial T}{\partial r} \big|_{r=r_o} \Rightarrow \frac{h}{k} = \text{cte} \rightarrow h = \text{cte}$$

A سطح مقطع لوله است. پس نتیجه می گیریم که h تابعی از x نیست. (در جریان توسعه یافته)

فرض شرایط مرزی در جریان آرام توسعه یافته

می توان نشان داد که در حالت دمای دیواره ثابت و یا شار حرارتی ثابت توزیع دما در شکل بی بعد آن در جهت x تغییر نمی کند و اصطلاحاً توسعه یافته تلقی می شود در نتیجه Nu مستقل از x بدست می آید. ابتدا جریان با شار حرارتی ثابت از روی دیواره ها بررسی می شود.

$$\begin{aligned}
 q'' &= h(T_w - T_m) = cte \\
 \frac{dT_w}{dx} &= \frac{dT_m}{dx} \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T_w}{\partial x} = \frac{\partial T_m}{\partial x} \\
 \frac{u}{\alpha} \frac{\partial T_m}{\partial x} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \\
 \left. \begin{aligned}
 r = r_o &\Rightarrow T = T_w \\
 r = 0 &\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \\
 u = 2u_{av} \left( 1 - \frac{r^2}{ro^2} \right)
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 &\frac{2V}{\alpha} \left( 1 - \frac{r^2}{r_o^2} \right) \frac{\partial T_m}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \\
 &T = f(r_o, r, \frac{\partial T_m}{\partial x}) \\
 &T_o = g(r_o, \frac{\partial T_m}{\partial x}) \\
 &T_m = \psi(r_o, \frac{\partial T_m}{\partial x})
 \end{aligned} \quad (5)
 \end{aligned}$$

براساس روابط بالا می توان نتیجه گرفت که:

$$\begin{aligned}
 q'' &= h(T_w - T_m) \\
 h &= \frac{48}{11} \frac{k}{D} \Rightarrow Nu = \frac{hD}{k} = \frac{48}{11} = 4.36 \quad (6)
 \end{aligned}$$

#### روابط تجربی و محاسباتی برای تعیین ضریب انتقال حرارت

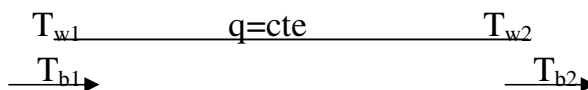
۱. جریان لایه ای کاملاً توسعه یافته:

در این بخش  $T_b$  بجای  $T_m$  بکار رفته است.

$$\begin{aligned}
 \frac{T - T_w}{T_b - T_w} &= f(r) \\
 q &= h(T_w - T_b) \\
 q &= -k(T_b - T_w) \\
 -k(T_b - T_w) \frac{df}{dr} \Big|_{r=r_o} &= hA(T_w - T_b) \rightarrow h = k \frac{df}{dr} \Big|_{r=r_o}
 \end{aligned} \quad (7)$$

چون سمت چپ تابعی از  $x$  نمی باشد در نتیجه  $h$  نیز تابع  $x$  نیست.

1-a شارحرارتی دیوار ثابت: ( $q=\text{constant}$ )

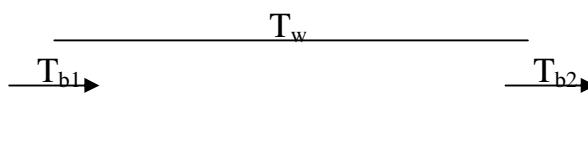


$$\begin{aligned}
 Nu = 4.36 &\rightarrow \frac{hd}{k} = 4.36 \\
 q &= hpl\Delta T \rightarrow \Delta T = \frac{q}{hpl} \\
 \Delta T &= T_{w1} - T_{b1}
 \end{aligned} \quad (8)$$

در نتیجه برای محاسبه می توان از رابطه زیر نیز استفاده کرد.

$$\Delta T = T_{w_2} - T_{b_2} \quad (9)$$

1b- دمای دیوار ثابت



$$Nu_d = 3.66 \quad \frac{hd}{k} = 3.66 \quad (10)$$

$$q = hpl\Delta T$$

$$\Delta T = T_w - T_b(x)$$

روش تقریبی:

$$\Delta T = T_w - \frac{(T_{b_1} + T_{b_2})}{2} \quad (11)$$

روش دقیق:

$$\dot{m} C_p T_{b_1} + hp dx (T_w - T_b) = \dot{m} C_p (T_b + \frac{dT_b}{dx} dx)$$

$$hp (T_w - T_b) = \dot{m} C_p \frac{dT_b}{dx}$$

$$\frac{\dot{m} C_p}{hp} \int_{T_{b_1}}^{T_{b_2}} \frac{dT_b}{T_w - T_b} = \int_0^l dx$$

$$\frac{\dot{m} C_p}{hp} \ln \frac{T_w - T_{b_1}}{T_w - T_{b_2}} = l$$

$$\frac{\dot{m} C_p}{h\rho} = \frac{1}{\ln \left( \frac{T_w - T_{b_1}}{T_w - T_{b_2}} \right)} \quad (12)$$

$$q = \dot{m} C_p (T_{b_2} - T_{b_1}) = hpl \Delta T$$

$$\Delta T = \frac{\dot{m} C_p (T_{b_2} - T_{b_1})}{hpl}$$

$$\Delta T = \frac{T_{b_2} - T_{b_1}}{\ln \left( \frac{T_w - T_{b_1}}{T_w - T_{b_2}} \right)}$$

۲. جریان لایه ای در حال توسعه در لوله های صاف دمای دیوار ثابت

$$\bar{Nu} = \frac{hD}{k_{av}} = \left\{ 3.66 + \frac{0.0668(D/L) \text{Re} \text{Pr}}{1 + 0.04[(D/L) \text{Re}]^{2/3}} \right\} \left( \frac{\mu_a}{\mu_w} \right)^{0.14} \quad (14)$$

$\mu_w \rightarrow$  دردمای دیواره

$$T_{b_a} = \frac{T_{b_1} + T_{b_2}}{2} \text{ و } \Delta T_{\log} \quad (15)$$

رابطه معروف دیگر مربوط به سایدنر و تیت (Sieder and Tate) می‌شود:

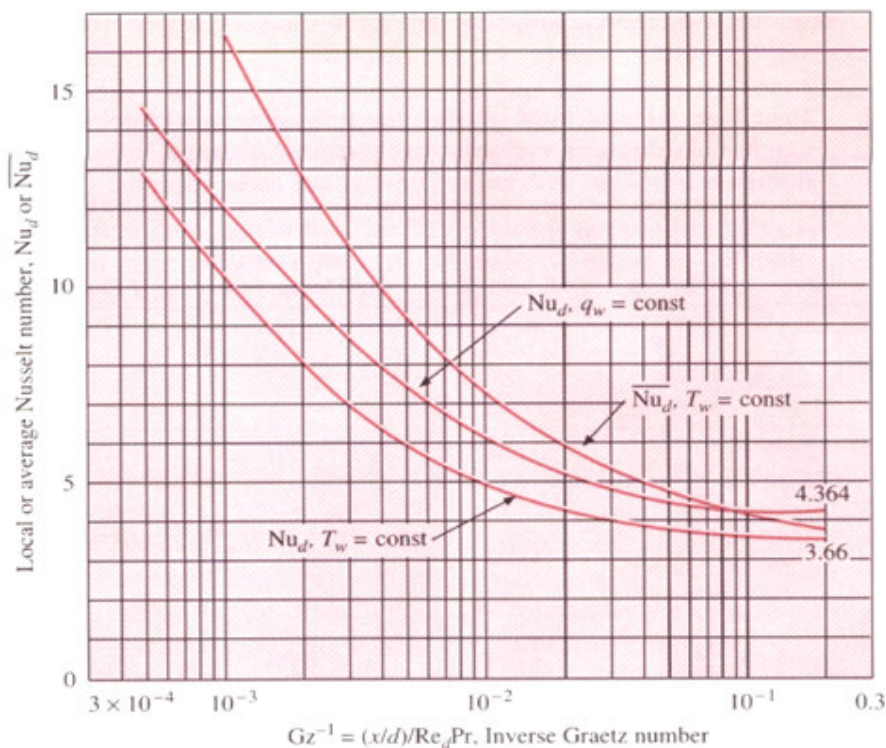
$$\bar{Nu}_d = 1.86(\text{Re}_D \text{Pr})^{1/3} \left( \frac{d}{l} \right)^{1/3} \left( \frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14}$$

$$\text{Re} \text{Pr} \frac{D}{L} > 10 \quad (16)$$

$$q = \bar{h} p \Delta T$$

$$\Delta T = T_w - \frac{1}{2}(T_{b1} - T_{b2})$$

۳. برای جریان لایه‌ای در حال توسعه در لوله‌های صاف و شار حرارتی ثابت در شکل زیر نوسلت موضعی نشان داده شده‌است.



شکل ناسلت موضعی و متوسط برای لوله با مقطع دایره‌ای در مقطع ورودی لوله با جریان توسعه یافته



$$\left(\frac{T_{b1} + T_{b2}}{2}\right)$$

جریان مغشوش توسعه یافته در لوله های صاف  
(Colburn Analogy) یا (Reynolds Analogy)

$$\tau = \rho(v + \varepsilon_m) \frac{\partial u}{\partial y} \quad (17)$$

$\varepsilon_m$  لزجت گردابه‌ای در جریان مغشوش تعریف می‌شود.

$$q_w'' = -\rho C_p (\alpha + \varepsilon_H) \frac{\partial T}{\partial y} \quad (18)$$

$\varepsilon_H$  نیز ضریب پخش گردابه‌ای تعریف می‌شود. با فرض توزیع خطی شار حرارتی و تنش برشی و فرض برابری لزجت‌های گردابه‌ای و ضریب پخش گردابه‌ای خواهیم داشت:

$$\tau = \tau_w \left(1 - \frac{y}{R}\right) \quad (19)$$

$$q'' = q_w'' \left(1 - \frac{y}{R}\right) \quad (20)$$

$$\varepsilon_m = \varepsilon_H \quad (21)$$

اگر

$$v = \alpha, \text{Pr} = 1 \quad (22)$$

آنگاه از (۱۹) و (۲۰)

$$\frac{q_w''}{C_p \tau_w} = \frac{-\partial T}{\partial y} \Rightarrow \frac{q''}{C_p \tau_w} dy = -dT$$

$$\frac{q_w''}{c_p \tau} \int_0^{u_{av}} du = - \int_{T_w}^{T_b} dT \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{q_w'' u_{av}}{c_p \tau_w} &= T_w - T_b \\ h_x &= \frac{q_w''}{T_w - T_b} \end{aligned} \right\} h_x = \frac{C_p \tau_w}{u_{av}}$$

داریم

$$\tau_w = \frac{1}{2} C_f \rho u_{av}^2 \quad (24)$$

$$\frac{h_x}{\rho c_p u_{av}} = \frac{C_f}{2} \quad (25)$$

با توجه به تعریف عدد استانتون

$$St_x = \frac{C_f}{2} \quad (26)$$

از طریق تجربی نشان داده شده است:

$$St_x Pr^{2/3} = \frac{C_f}{2}$$

$$St = \frac{Nu}{Re Pr}$$

$$Nu = Re Pr^{1/3} \cdot \frac{cf}{2}$$

(۲۷)

نیاگرام مودی

$$f = 4C_f$$

$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^n \begin{matrix} \nearrow n = 0.3 \text{ Cooling} \\ \longrightarrow n = 0.4 \text{ heating} \end{matrix}$$

$$Re_D > 10^4, 0.7 < Pr < 100, L/D \geq 60$$

اگر خواص خیلی تغییر کنند:

$$\bar{Nu}_D = 0.023 Re^{0.8} Pr^{1/3} \left( \frac{\mu_{av}}{\mu_w} \right)^{0.14}$$

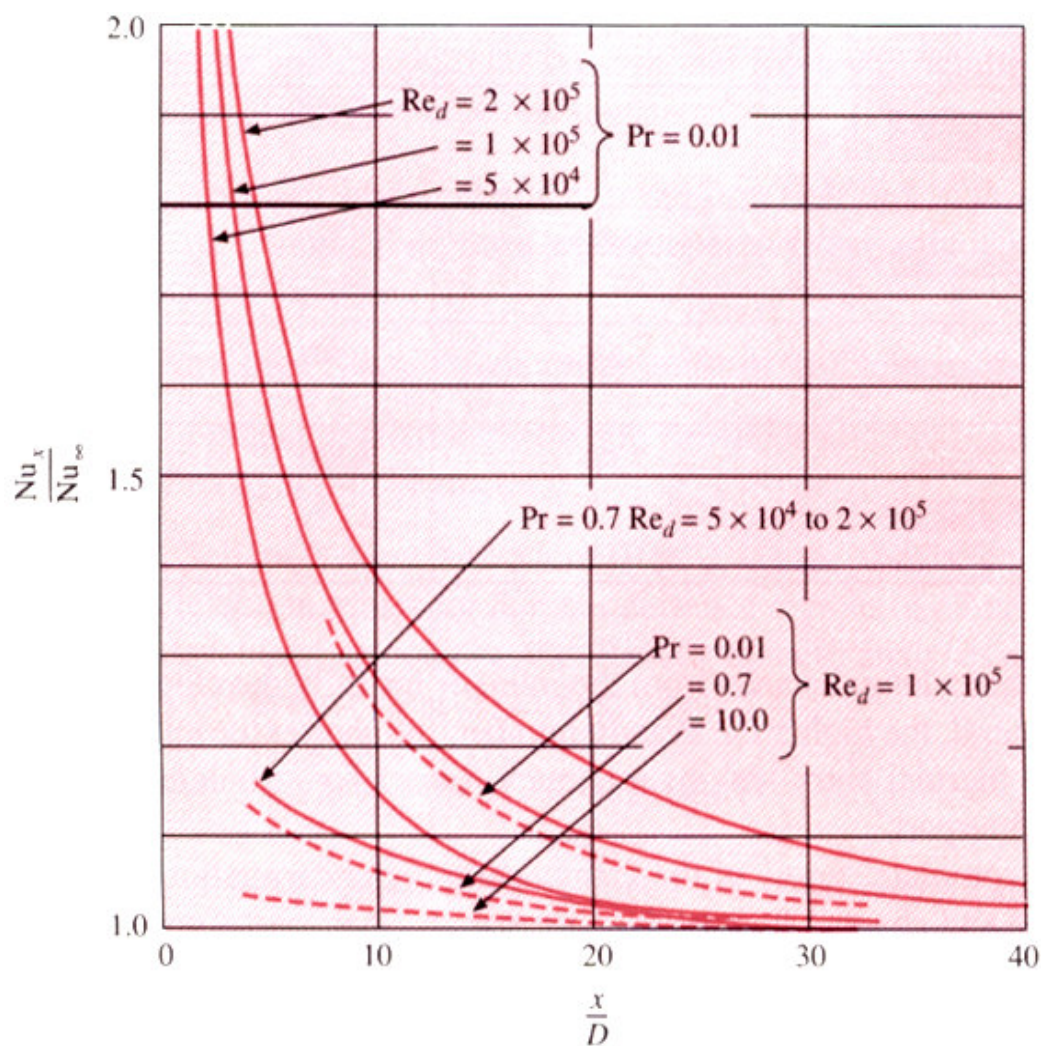
(۲۸)

$\Delta T = \Delta T_{\log}$ ، خواص در نمای زیر:

$$T_{b_a} = \frac{T_{b1} + T_{b2}}{2}$$

$$T_w = cTe \Rightarrow \Delta T = T_w - T_b$$

**نکته:** در این جزوه تنها به تعداد محدودی از روابط تجربی در جریان‌های داخلی اشاره شده است. روابط دقیق‌تر را می‌توان در کتاب‌های انتقال حرارت پیشرفته و یا کتاب‌های مربوط به مبدل‌های حرارتی جستجو کرد [۱۴] و [۱۵].



شکل ناسلت برای ورودی حرارتی لوله‌های با شار حرارتی ثابت و جریان توربولانس توسعه یافته

## فصل هفتم: انتقال حرارت تابشی

### Radiation Heat Transfer

از دیدگاه موجی انرژی تابشی به صورت انتشار امواج الکترومغناطیس صورت می‌پذیرد.

طیف امواج حرارتی  $0.01 \mu_m < \lambda < 200 \mu_m$

طیف مرئی  $0.2 \mu_m < \lambda < 0.7 \mu_m$

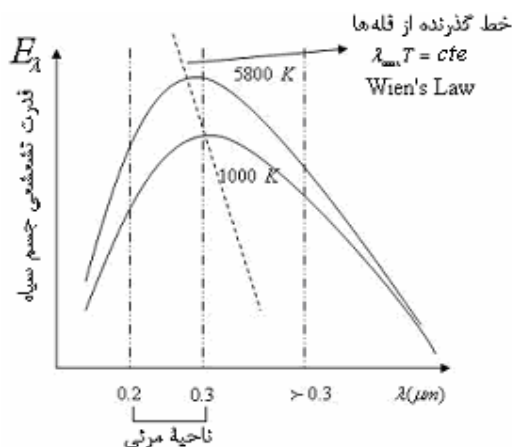
جسم ایده آل: جسم سیاه Black Body

به جسمی سیاه می‌گوئیم که:

۱. همه انرژی تابشی را جذب می‌کند.
۲. انتشار امواج در همه جهات یکنواخت است.
۳. انتشار انرژی حرارتی آن از هر جسم دیگری در دمای یکسان بیشتر است.

در شکل نمودار قدرت تشعشعی جسم سیاه  $E_{b\lambda}$  بر حسب درجه حرارت و طول موج نشان داده شده است. همانگونه که در شکل نیز مشخص است برای دماهای بیشتر قله منحنی به طول موج‌های کوتاهتر انتقال می‌یابد این نقاط حداکثر طبق قانون وین به هم مربوط می‌شوند:

$$\lambda_{\max} T = 2897.6 \mu m K [5215.6 \mu m^\circ R]$$



\* سطح زیر منحنی بیانگر انرژی منتقل شده به یا از جسم سیاه است.

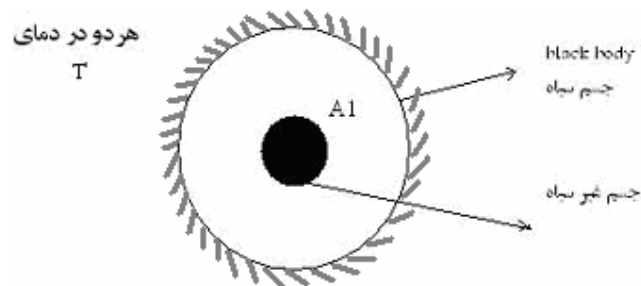
رابطه پلانک

$$E_{b,\lambda} = \frac{C_1}{\lambda^5 \left[ \exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1 \right]} \quad (1)$$

رابطه انرژی بولتزمن:

$$E_b = \int_0^{\infty} E_{b,\lambda} d\lambda = \sigma T^4 \quad (2)$$

برای روشن شدن روابط فوق و خصوصیات جسم سیاه:



هر دو دمای T دارند.

$$q_{\text{جسم سیاه } A_1} = EA_1 = \epsilon E_b A_1 \quad (3)$$

ضریب جذب  $\epsilon = \frac{E(T)}{E_b(T)}$  و  $\epsilon_{\text{جسم سیاه}} = 1$

ضریب نشر

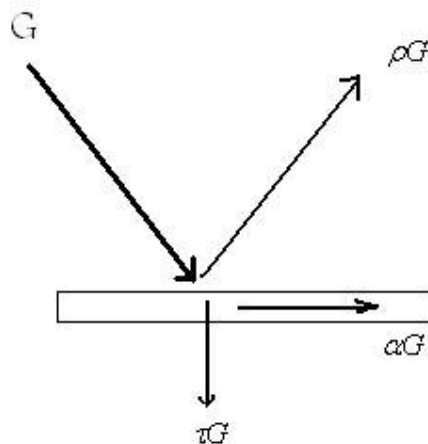
از تعادل حرارتی داریم:

$$\underbrace{E_b \alpha A_1}_{\text{صادر شده به جسم سیاه}} = \underbrace{E_b \epsilon A_1}_{\text{جذب شده توسط } A_1} \Rightarrow \alpha = \epsilon$$

چراکه آنچه از طریق تابش از جسم غیر سیاه خارج شده توسط جسم غیرسیاه جذب می شود و تعادل دمای حرارتی برقرار می ماند.

**جذب، بازتابش و عبور از یک سطح**

آنچه انرژی تابشی به یک سطح می رسد به صورت تعادل جذب، بازتابش و عبور از آن جسم می شود.



$$G = \rho G + \alpha G + \tau G \quad (5)$$

انرژی تابشی رسیده

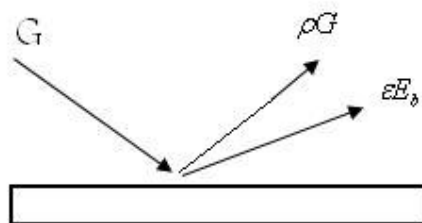
$$\rho + \alpha + \tau = 1$$

$\tau$ : ضریب انتقال (عبور)

$\alpha$ : ضریب جذب

$\rho$ : ضریب انعکاس

پس اگر فرض کنیم که جسم ما انرژی تابشی را از خود عبور نمی‌دهد ( $\tau = 0$ ) آنگاه خواهیم داشت:



$\epsilon E_b$ : تشعشع به خاطر دمای خود جسم

$$J = \rho G + \epsilon E_b \quad (6)$$

در رابطه فوق  $J$  رادیوسیتی می‌باشد.

$$q = A(J - G) \rightarrow q = A\left(J - \frac{J - \epsilon E_b}{\rho}\right) = \left(J - \frac{J - \epsilon E_b}{1 - \alpha}\right) \quad (7)$$

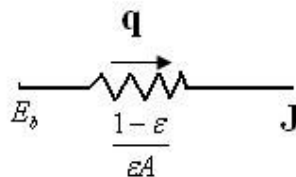
بافرض صرف نظر از  $\tau$

$$q = A(J - \frac{J - \epsilon E_b}{1 - \epsilon})$$

$$q = A(E_b - J) \frac{\epsilon}{1 - \epsilon} = A(E_b - J) \frac{\epsilon}{1 - \epsilon} \quad (8)$$

$$\Rightarrow q = \frac{E_b - J}{\frac{1 - \epsilon}{\epsilon A}}$$

پس برای اجسام تبادل کننده انرژی از طریق تابش داریم:

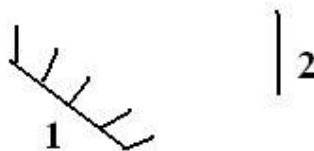


برای جسم سیاه  $E_b = J$

### ضریب دید View Factor

ضریب دید به صورت کسری از انرژی تابشی است که سطح I را ترک کرده و به سطح J می‌رسد و آن را اصطلاحاً با  $F_{ij}$  نشان می‌دهیم.

↓  
ترتیب مهم است



مقدار انرژی که سطح ۱ را ترک می‌کند و به سطح ۲ می‌رسد برابر است با:

$$q_{1-2} = J_1 A_1 F_{12} \quad (9)$$

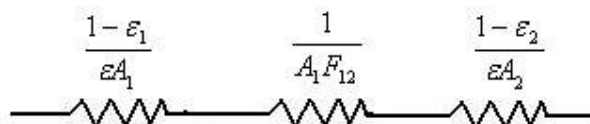
مقدار انرژی که سطح ۲ را ترک می‌کند و به سطح ۱ می‌رسد برابر است با:

$$q_{2-1} = J_2 A_2 F_{21} \quad (10)$$

در نهایت مقدار کل انرژی مبادله شده برابر خواهد بود با:

$$Q_{1-2} = J_1 A_1 F_{12} - J_2 A_2 F_{21} \quad (11)$$

مدار معادل:



- روابط بین ضرایب دید:

$$A_i F_{ij} = A_j A_{ji}$$

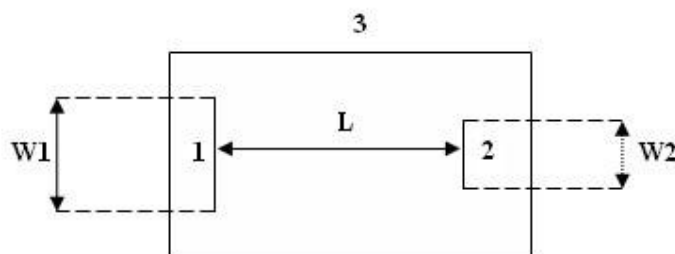
$$\sum_{j=1}^N F_{ij} = 1 \quad (12)$$

برای محاسبه تبادل تابش در یک محفظه N سطحی، تعداد  $N^2$  ضریب دید مورد نیاز است. این نیاز هنگامی واضح تر بیان می شود که ضرایب دید به صورت ماتریس مرتب شوند.

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{bmatrix} \quad (13)$$

ولی لازم نیست که تمام ضرایب دیده‌ها به طور مجزا محاسبه شوند. با استفاده از دو رابطه اساسی گفته شده برای ضرایب دید می توان تمام ضرایب دید را مشخص نمود.

**مثال:**



$$\sum_{j=1}^3 F_{ij} = 1 \Rightarrow F_{i1} + F_{i2} + F_{i3} = 1 \quad (14)$$

\* ضریب دید هر جسم غیر محدب نسبت به خودش صفر می باشد.

$$F_{11} = 0$$

$$\Rightarrow F_{12} + F_{13} = 1$$

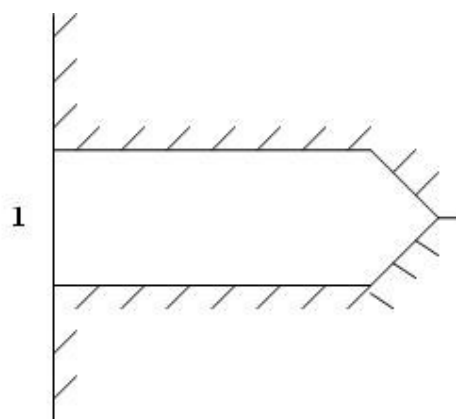
$$F_{12} = \frac{[(w_1 + w_2)^2 + 4]^{1/2} - [(w_2 - w_1)^2 + 4]^{1/2}}{2w_1} \quad (15)$$

$$\Rightarrow F_{13} = 1 - \frac{[(w_1 + w_2)^2 + 4]^{1/2} - [(w_2 - w_1)^2 + 4]^{1/2}}{2w_1}$$

**مثال:**

ضریب شکل سر سوراخ ۱ رانست به داخل آن پیدا کنید.



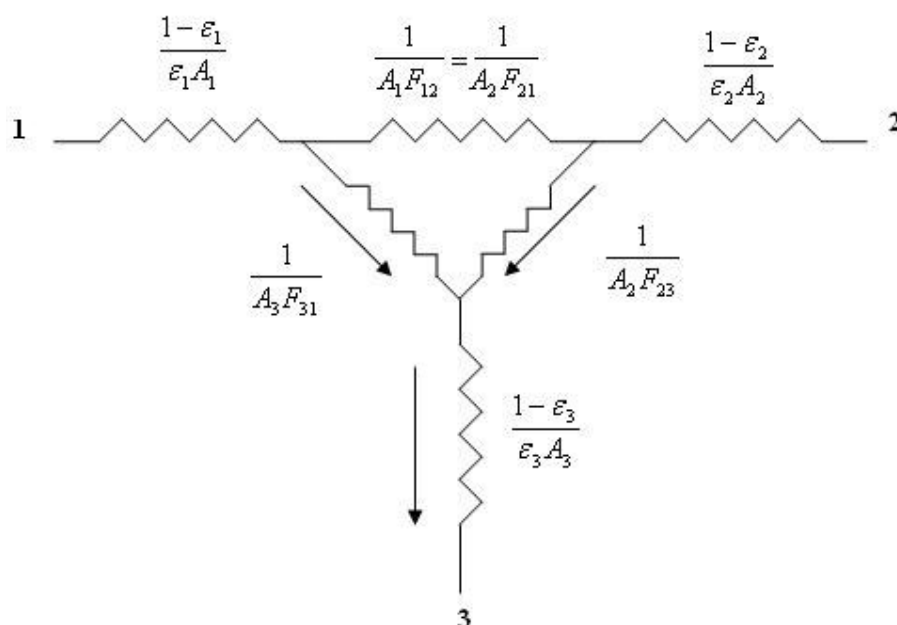


با یک نگاه می توان جواب داد که ضریب دیدسر سوراخ نسبت به خود سوراخ برابر یک است زیرا هر چه تابش از سرسوراخ وارد بدنه سوراخ شود درون سوراخ جذب یا بازتابش خواهد شد یا به عبارتی اگر چشم شخصی روی سوراخ باشد تمام دیدآن فرد درون سوراخ است و جای دیگری را نمی بیند.

### تئوری روش محاسباتی

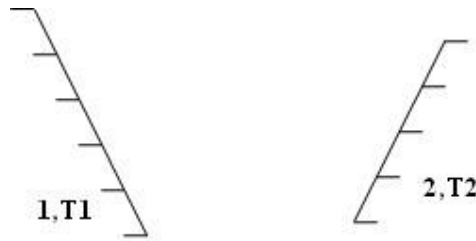
$$F_{11} + F_{12} = 1 \Rightarrow F_{12} = 1 \quad (16)$$

شکل مدار مثال ۱:



انتقال انرژی تابشی در اجسام سیاه

برای مثال در شکل زیر:



$$\begin{aligned} q_{12} &= A_1 F_{12} = A_1 E_{b1} F_{12} \\ q_{21} &= A_2 E_{b2} F_{21} \end{aligned} \quad (17)$$

تبادل انرژی از سطح ۱:

$$\begin{aligned} q &= q_{12} - q_{21} \\ 1 &= A_1 F_{12} E_{b1} - A_2 F_{21} E_{b2} \\ \Rightarrow 1 &= A_1 F_{12} 6(T_1^4 - T_2^4) \end{aligned} \quad (18)$$

به طور کلی داریم:

$$q_1 = \sum_{j=1}^N A_i F_{ij} 6(T_i^4 - T_j^4) \quad (19)$$

**مثال:**

در مثال ۱ انرژی انتقالی از سطح جسم را بدست آورید.

$$q = \sum_{j=1}^N A_i F_{ij} 6(T_i^4 - T_j^4) = A_1 F_{12} 6(T_1^4 - T_2^4) + A_1 F_{13} 6(T_1^4 - T_3^4)$$

$$F_{12} = \frac{[(w_1 + w_2) + 4]^{1/2} - [(w_2 w_1)^2 + 4]^{1/2}}{2w_1}$$

$$F_{13} = -\frac{[(w_1 + w_2)^2 + 4]^{1/2} - [(w_2 - w_1)^2 + 4]^{1/2}}{2w_1}$$